Листок 3.

Мера Лебега

Множество $U \subset [0,1]$ называется открытым в $[0,1]$, если найдется открытое множество $V \subset \mathbb{R}$ такое, что $U = V \bigcap [0,1]$. Открытое множество U состоит из попарно не пересекающихся интервалов и может быть одного или двух полуинтервалов, содержащих точки 0 и 1. Напомним, что мера $\lambda(U)$ открытого множества U определяется как сумма длин составляющих его промежутков.

Пусть $E \subset [0,1]$. Верхней мерой Лебега множества E называют число

$$\lambda^*(E) = \inf_{U: E \subset U} \lambda(U),$$

где U – открытое множество.

Задача 1. (a) Докажите, что $\lambda^*(U) = \lambda(U)$ для открытого множества U.

(b) Докажите, что, если $E \subset \bigcup E_k$, то $\lambda^*(E) \le \sum_k \lambda^*(E_k)$.

Задача 2. Предположим, что F_n – замкнутые попарно непересекающиеся множества. Докажите, что верно равенство:

$$\lambda^*(\bigcup_n F_n) = \sum_n \lambda^*(F_n).$$

Задача 3. Пусть U – открытое множество в $[0,1]$. Докажите, что $\lambda^*(U) + \lambda^*([0,1] \setminus U) = 1$.

Множество $E \subset [0,1]$ называется измеримым по Лебегу, если

$$\lambda^*(E) + \lambda^*([0,1] \setminus E) = 1.$$

Из предыдущей задачи следует, что открытые и замкнутые множества измеримы по Лебегу.

Задача 4. Докажите, что $E \subset [0,1]$ измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F_ε и открытое множество U_ε такие, что $F_\varepsilon \subset E \subset U_\varepsilon$ и

$$\lambda^*(U_\varepsilon) - \lambda^*(F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Задача 5. (a) Пусть E_n – попарно непересекающиеся измеримые множества в $[0,1]$. Докажите, что множество $E = \bigcup_n E_n$ измеримо и $\lambda^*(E) = \sum_n \lambda^*(E_n)$.

(b) Докажите, что множество всех измеримых подмножеств $[0,1]$ замкнуто относительно дополнений, счетных объединений, счетных пересечений и содержит $[0,1]$ и пустое множество. Систему подмножеств с такими свойствами называют σ-алгеброй.

(c) Докажите, что измеримое множество положительной верхней меры Лебега является континуальным.

Далее верхнюю меру Лебега на измеримых множествах обозначаем просто λ.

Задача 6. (a) Множество E состоит из тех точек отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых на четных местах стоит цифра 5. Докажите, что E измеримо и найдите $\lambda(E)$.

(b) Для всякого $\varepsilon > 0$ постройте замкнутое нигде не плотное множество $F_\varepsilon \subset [0,1]$ и такое, что

$$\lambda(F_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.$$

Интеграл Лебега

Функция $f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ называется измеримой, если множество $\{x\colon f(x) < \beta\}$ измеримо для всякого β.

Задача 7.

(a) Докажите, что непрерывные функции и монотонные функции являются измеримыми.

(b) Докажите, что для измеримой функции f множества $\{x\colon f(x) > \alpha\}$ и $\{x\colon f(x) = \alpha\}$ измеримы.

(c) Приведите пример неизмеримой функции.

Задача 8. Пусть f, g – измеримые функции.

(a) Докажите, что $f + g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ и $|f|$ являются измеримыми функциями.

(b) Докажите, что композиция $\psi(f)$, где ψ – непрерывная функция, является измеримой функцией.

(c) Пусть f_n измеримые функции и последовательность f_n поточечно сходится к f на $[0,1]$. Докажите, что функция f измерима.

Измеримая функция f называется *простой функцией*, если она принимает конечное число значений, т.е. $f(x) = \sum_j c_j \chi_{A_j}$, где A_j – измеримые множества. По определению

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_j c_j \lambda(A_j).$$

Задача 9. (a) Докажите, что определение не зависит от выбора разбиения A_j.

(b) Докажите, что интеграл линеен и монотонен по функции f.

(c) Докажите, что всякая измеримая ограниченная функция является равномерным пределом последовательности простых функций.

(d) Докажите, что если последовательность простых функций f_n равномерно сходится к измеримой функции f, то числовая последовательность $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ сходится и ее предел не зависит от выбора последовательности f_n.

Если f – измеримая ограниченная функция на $[0,1]$, то ее интегралом Лебега называется

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx,$$

где f_n – какая-либо последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f. Из арифметики пределов немедленно следует, что интеграл Лебега линеен и монотонен по f. Если E – измеримое множество, то по определению

$$\int_E f(x)\,dx := \int_0^1 f(x)\chi_E(x)\,dx.$$

Задача 10. (a) Докажите аддитивность интеграла Лебега: если $E_1\cap E_2=\emptyset$, то

$$\int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx = \int_{E_1\cup E_2} f(x)\,dx.$$

(b) Докажите, что найдется такое число $\mu\in[\inf_E f, \sup_E f]$, что

$$\int_E f(x)\,dx = \mu\lambda(E).$$

Задача 11. (Теорема Лебега) Пусть последовательность измеримых функций f_n сходится во всех точках отрезка $[0,1]$, кроме быть может множества меры нуль, к измеримой функции f. Предположим, что $|f_n(x)|\le C$ для всех x,n и некоторого $C>0$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Покажите, что от ограниченности отказаться нельзя.

Задача 12. (Критерий Дарбу и критерий Лебега) Пусть f – ограниченная функция. Для каждого разбиения отрезка $[0,1]$ точками $k/2^n$ на полуотрезки $\Delta_k=[(k-1)/2^n, k/2^n)$ при $k<2^n$ и отрезок $\Delta_k=[(2^n-1)/2^n, 1]$ при $k=2^n$ определим функции

$$m_n(x)=\sum_j \chi_{\Delta_j}(x)\inf_{\Delta_j} f, \quad M_n(x)=\sum_j \chi_{\Delta_j}(x)\sup_{\Delta_j} f.$$

(a) Докажите, что функция f интегрируема на $[0,1]$ по Риману тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big(M_n(x)-m_n(x)\Big)\,dx = 0.$$

Интегралы от m_n и M_n называются нижней и верхней суммой Дарбу.

(b) Докажите, что в каждой точке x, кроме быть может счетного множества, последовательность $m_n(x)$ не убывает и сходится к некоторому числу $m(x)$ и последовательность $M_n(x)$ не убывает и сходится к некоторому числу $M(x)$. Докажите, что функции $m(x)$ и $M(x)$ измеримы. Что можно сказать про эти функции, если f непрерывна на $[0,1]$?

(c) Докажите, что функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда функция f непрерывна во всех точках, кроме быть может множества меры нуль.