Листок 5**.

Теорема Менгера–Небелинга–Понтрягина

Будем говорить, что компакт K в метрическом пространстве имеет размерность не выше N, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть $a_1, \dots a_k$ такая, что всякая точка компакта принадлежит на более чем $N+1$ шару радиуса ε с центром в какой-то из точек a_i.

Задача 1. Докажите, что отрезок имеет размерность не выше 1, и не может иметь размерность 0. Докажите, что конечнозвенная ломаная в $\mathbb{R}^n$ имеет размерность не выше 1 и не может иметь размерность 0.

Задача 2. Докажите, что непрерывная кривая в $\mathbb{R}^n$ обязательно имеет размерность большую нуля. Верно ли, что она имеет размерность не большую 1?

Задача 3. Покажите на примере, что не всякую конечнозвенную ломаную в $\mathbb{R}^3$ можно гомеоморфно вложить в $\mathbb{R}^2$.

Следующие задачи посвящены доказательству теоремы Менгера–Небелинга–Понтрягина:
всякий компакт размерности не выше N можно гомеоморфно вложить в $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Отображение f из метрического пространства в метрическое пространства называется ε-отображением, если из того, что $f(x_1) = f(x_2)$ следует неравенство $\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon$. Если отображение f является ε-отображением для всякого $\varepsilon > 0$, то f – инъекция.

Пусть далее K – компакт размерности не выше N. Рассмотрим пространство $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$ непрерывных отображений $f\colon K \mapsto \mathbb{R}^{2N+1}$ с метрикой $\varrho(f,g) = \max_{x\in K} \|f(x) - g(x)\|$, где $\|y\| = \sqrt{\sum_i y_i^2}$.

Пусть U_n – множество всех непрерывных $1/n$-отображений компакта K в $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Задача 4. Докажите, что U_n – открытое множество.

Задача 5. Докажите, используя теорему Бэра, что если для любого n множество U_n всюду плотно, то искомое (в теореме) вложение существует.

Для завершения доказательства согласно теореме Бэра достаточно показать, что U_n всюду плотны в $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$. Пусть f – произвольный элемент $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$ и $\varepsilon > 0$. Найдем $\varepsilon/2$-сеть $\{a_1, \dots a_k\}$ такую, что каждая точка компакта входит в не более чем $N+1$ шар и на каждом шаре $B_i = B(a_i, \varepsilon)$ колебание функции f меньше наперед заданного числа $\gamma > 0$. Выбираем k точек $p_1, \dots, p_k$ в $\mathbb{R}^{2N+1}$ так, что

1) расстояние от p_i до $f(B_i)$ меньше γ,

2) никакие $m+2$ точки p_i не лежат в m-мерном пространстве, $m \le 2N$. (Например в $\mathbb{R}^3$ это означает, что все точки различны, никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной плоскости.)

Задача 6. Покажите, что такой выбор точек возможен.

Пусть $w_i(x)$ – расстояние от x до $K \setminus B_i$.

Задача 7. Докажите, что w_i – непрерывные функции.

Положим $g(x)$ – центр масс точек p_i с весом $w_i(x)$.

Задача 8. Докажите, что $g(x)$ – непрерывная функция и расстояние между $g(x)$ и $f(x)$ меньше 2γ.

Задача 9. Докажите, что g – ε-отображение.

(Указание: рассмотрим случай $N = 1$. Каждая точка компакта входит в не более чем два шара B_i. Пусть x_1 входит в B_1, B_2 и x_2 входит в B_3, B_4. Тогда $w_i(x_1) = 0$ при $i > 2$ и $w_i(x_2) = 0$ при $i < 3$ и $i > 4$. Равенство $g(x_1) = g(x_2)$, влечет что наборы $\{p_1, p_2\}$ и $\{p_3, p_4\}$ пересекаются. Действительно прямая, проходящая через p_1, p_2, и прямая, проходящая через p_3, p_4 пересекаются в точке $g(x_1) = g(x_2)$. Если указанные наборы не пересекаются, то имеем четыре точки лежащие на одной плоскости, а это противоречит условие 2) на точки p_i. Итак, наборы пересекаются и, следовательно, x_1, x_2 принадлежат одному шару.)