Листок 2

В этом листке изучаются представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ над полем $\mathbb{C}$.

$$[e, f] = h, [h, e] = 2e, [h, f] = -2f.$$

Пусть (ρ, V) — конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$, $\rho(e) = E, \rho(f) = F, \rho(h) = H$.

1. Пусть λ — собственное значение элемента H на V с наибольшей действительной частью, $\tilde{V}(\lambda)$ — корневое подпространство для λ. Докажите, что $E|_{\tilde{V}(\lambda)} = 0$.

2. Пусть $v \in V$ такой, что $Ev = 0$. Для любого $k > 0$ найдите многочлен $P_k(x)$ степени k такой, что $E^k F^k v = P_k(H)v$.

3. Пусть $v \in \tilde{V}(\lambda)$. Докажите, что существует $N > 0$ такое, что $F^N v = 0$.

4. Докажите, что H действует диагонализируемым оператором на $\tilde{V}(\lambda)$.

5. Пусть N_v — наименьшее N из задачи 3. Докажите, что $\lambda = N_v - 1$.

6. Докажите, что для любого $N > 0$ существует единственное с точностью до изоморфизма неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$ размерности N. Вычислите E, F, H в подходящем базисе.

Обозначим $\lambda + 1$-мерное неприводимое представление из задачи 6.

7. Докажите, что оператор $EF + FE + \dfrac{H^2}{2}$ (оператор Казимира) коммутирует с E, F, H и действует умножением на $\dfrac{\lambda(\lambda+2)}{2}$ на V_λ.

8. Докажем, что любое представление вполне приводимо. Пусть V — представление наименьшей размерности, которое не является суммой неприводимых. Докажите, что у оператора C на V_λ есть только одно собственное значение $\dfrac{\lambda(\lambda+2)}{2}$ для некоторого целого λ.

9. Докажите, что V содержит неприводимое подпредставление $W = V_\lambda$ такое, что $V/W = nV_\lambda$ для некоторого n.

10. Докажите, что собственное подпространство $V(\lambda)$ элемента H — $n+1$-мерное. Если $v_1, \ldots, n+1$ — базис $V(\lambda)$, докажите, что $F^j v_i, 1 \leq i \leq n+1; 0 \leq j \leq \lambda$ — линейно независимы и образуют базис V.

11. Определим V_i как линейную оболочку $v_i, \ldots, F^\lambda v_i$. Докажите, что V_i — подпредставления V и докажите, что это противоречит тому, что V — не вполне приводимо.

12. Пусть V — векторное пространство и $A : V \to V$ — нильпотентный оператор. Докажите, что существует единственное с точностью до изоморфизма представление $\mathfrak{sl}_2$ такое, что $E = A$.

13. Разложите на неприводимые представление $V_\lambda \otimes V_\mu$.

14. Пусть $V = \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N$ и $A = J_M(0) \otimes \mathrm{id}_N + \mathrm{id}_M \otimes J_N(0)$ где $J_n(0)$ — жорданов блок с собственным значением 0. Найдите ЖНФ оператора A.