Листок 4

1. Пусть G — группа порядка p^n. Докажите, что все представления G над полем характеристики p — тривиальны.

2. Пусть $|G| = 0$ в $\mathbb{k}$. Докажите, что число классов неприводимых представлений над $\mathbb{k}$ строго меньше числа классов сопряженности.

3. Пусть G — конечная группа. Пусть V_i — неприводимое представление над $\mathbb{C}$. Положим

$$\psi_j = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) g^{-1} \in \mathbb{C}[G].$$

Докажите, что в произвольном представлении ψ_j является проектором на V_j. Более того, $\psi_i \psi_j = 0 \, \forall \, i \neq j$.

4. Пусть G — группа 3×3 строго верхнетреугольных матриц над $\mathbb{F}_p$ (единицы на диагонали). Такая группа называется группой Гейзенберга. Для любого $z \in \mathbb{C}$ определим представление R_z на пространстве комплексных функций на $\mathbb{F}_p$ следующим образом:

$$\rho(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f)(x) = f(x-1)$$

$$\rho(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f)(x) = z^x f(x).$$

1)Докажите, что R_z корректно и однозначно определено и посчитайте $\rho(g)$ для любого $g \in G$.
2) Докажите, что R_z неприводимо тогда и только тогда, когда $z \neq 1$.
3) Классифицируйте все одномерные представления G и покажите, что R_1 является прямой суммой всех одномерных, причём каждое встречается ровно один раз.
4) Классифицируйте все неприводимые представления G.
5) Найдите характеры и тензорные произведения неприводимых представлений.

4. Пусть V — тавтологическое представление $GL(V)$. Докажите, что S^nV и Λ^nV — неприводимые представления.

5. Пусть G — конечная группа и V — точное комплексное представление. Докажите, что каждое неприводимое комплексное представление является прямым слагаемым в S^nV.

6. Индикатором Фробениуса-Шура называется следующая величина:

$$FS(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2).$$

Напомним, что комплексное представление может быть одного из трёх типов:
1) Комплексного, $V \not\simeq V^*$; $FS(V) = 0$;
2) Вещественного, $V \simeq V^*$; существует невырожденная G-инвариантная симметрическая билинейная форма, $FS(V) = 1$;

3) Кватернионного, $V \simeq V^*$; существует невырожденная G-инвариантная кососимметрическая билинейная форма $FS(V) = -1$.
а) Докажите, что в первом случае $\mathrm{End}_{R[G]}V = \mathbb{C}$; во втором — $\mathrm{End}_{R[G]}V = M_2(\mathbb{R})$; в третьем — $\mathrm{End}_{R[G]}V = \mathbb{H}$.
б) Докажите, что неприводимое представление V является представлением вещественного типа, тогда и только тогда, когда $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. То есть представление вещественно, тогда и только тогда, когда оно в некотором базисе записывается вещественными матрицами.

7. Пусть V — неприводимое вещественное (над $\mathbb{R}$) представление и $V_{\mathbb{C}}$ — его комплексификация.
1) Если $\mathrm{End}_G V_0 = \mathbb{R}$, то $V_{\mathbb{C}}$ — неприводимо и $FS(V_{\mathbb{C}}) = 1$.
2) Если $\mathrm{End}_G V_0 = \mathbb{C}$, то $V_{\mathbb{C}} = W \oplus W^*$, где W — неприводимое представление и $FS(W) = 0$.
3) Если $\mathrm{End}_G V_0 = \mathbb{H}$, то $V_{\mathbb{C}} = W \oplus W$, где W — неприводимое представление и $FS(W) = -1$.

8. Докажите, что любое неприводимое комплексное (над $\mathbb{C}$) представление является прямым слагаемым в комплексификации некоторого неприводимого вещественного представления, причём это представление однозначно определенно. Обратно, любое неприводимое вещественное представление содержится в овеществлении некоторого представления над $\mathbb{C}$, которое определенно однозначно.

9. Опишите все неприводимые представления группы A_4 над $\mathbb{R}$.