НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения. Экзамен. 23.05.2018.

Решения просьба оставить в моей почтовой ячейке в Учебной части не позднее понедельника 28.05.2018 или прислать скан решения на электронную почту.

При обнаружении опечаток или ошибок в условии просьба немедленно написать.

Критерии оценки: для «отлично» достаточно 25 баллов, для «хорошо» достаточно 20 баллов, для «удовлетворительно» достаточно 15 баллов.

Задача 1. Доказать, что для компактной римановой поверхности верно равенство $\deg T^{1,0}M = \chi(M)$. (5 баллов)

Задача 2. Найти символ $\sigma_1(\bar\partial)$. Доказать эллиптичность $\bar\partial+\bar\partial^*$ и $\bar\Box = \bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial$. (5 баллов)

Задача 3. Постройте пример компактного комплексного многообразия, которое не является кэлеровым. *Указание. Рассмотрите многообразие* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. (5 баллов)

Задача 4. Пусть M комплексное многообразие, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ эрмитова метрика, а ∇ связность Леви-Чивиты, согласованная с римановой метрикой $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Пусть ω ассоциированная с метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ форма. Докажите, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, то есть когда параллельный перенос не только ортогонален, то есть сохраняет риманову метрику $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, но и унитарен, то есть сохраняет эрмитову структуру. Доказать, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$. (10 баллов)

Задача 5. Кэлерова метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на многообразии M такая, что ассоциированная $(1,1)$-форма ω даёт рациональный когомологический класс

$$[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Q}),$$

называется *метрикой Ходжа.* Подразумевая фиксированную метрику, иногда говорят, что само многообразие M ходжево. Докажите, что комплексно-аналитическое подмногообразие ходжева многообразия само является ходжевым многообразием. Докажите, что все неособые комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}P^n$ являются многообразиями Ходжа. (5 баллов)

Задача 6. Докажите, что если усреднить на торе $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ ходжеву метрику, то получится ходжева метрика с постоянными коэффициентами с теми же периодами. (5 баллов)

Задача 7. Докажите, что кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n,\mathbb{R})$ изоморфно факторкольцу $\mathbb{R}[t]/(t^{n+1})$, где $t = c_1([H])$ первый класс Чженя расслоения гиперплоскости. (5 баллов)

Задача 8. По аналогии с числами Бетти $b^r(X) = \dim H^r(X,\mathbb{C})$ обозначим через $b_0^r(X)$ размерность пространства примитивных классов когомологий степени r кэлерова многообразия X. Доказать, что для компактного кэлерова многообразия X комплексной размерности n при $r \leqslant n$ верно равенство

$$b_0^r(X) = b^r(X) - b^{r-2}(X).$$

(10 баллов)

Задача 9*. (Для тех, кто знает, что такое раздутие) Пусть X многообразие, полученное из $\mathbb{C}P^n$ раздутием одной точки, пусть $\pi_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ естественная проекция. Рассмотрим линейное расслоение $E = \pi_1^*[H]$, то есть обратный образ расслоения гиперплоскости относительно проекции π_1. Докажите, что $H^{p,p}(X,E) \neq 0$ при $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Положительно ли расслоение E? (15 баллов)