НМУ, Комплексно аналитические многообразия и голоморфные расслоения-II. Листок 1. Разное. Кэлеровы многообразия. 5.04.20018.

Задача 1. Доказать, что для компактной римановой поверхности

$$\deg T^{1,0}M = \chi(M).$$

Задача 2. Найти символ $\sigma_1(\bar\partial)$.
Задача 3. Доказать эллиптичность $\bar\partial + \bar\partial^*$ и $\bar\Box = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$.
Задача 4. Пусть ds^2 — эрмитова метрика, а

$$\omega = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,ds^2$$

— ассоциированная $(1,1)$-форма этой эрмитовой метрики. Доказать, что условие положительности эрмитовой метрики можно переписать как то, что для любого голоморфного касательного вектора $v \in T_z^{1,0}M$ выполняется

$$i\langle\omega(z), v \wedge \bar v\rangle > 0.$$

Задача 5. Пусть M комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ эрмитова метрика, а ∇ связность Леви-Чивиты, согласованная с римановой метрикой $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Пусть J оператор комплексной структуры, а ω ассоциированная с метрикой $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ форма.

Доказать, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, то есть когда параллельный перенос не только ортогонален, то есть сохраняет риманову метрику $\mathrm{Re}\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, но и унитарен, то есть сохраняет эрмитову структуру.

Задача 6. В условиях предыдущей задачи доказать, что метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ кэлерова тогда и только тогда, когда $\nabla J = 0$.

Задача 7. Построить пример компактного комплексного многообразия, которое не является кэлеровым.

Указание. Рассмотрите действие $\mathbb{Z}$ *на* $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$, *порождённое отображением* $(z_1, z_2) \longmapsto (2z_1, 2z_2)$. *Докажите, что факторпространство гомеоморфно* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. *Таким образом, мы вводим на* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ *структуру комплексно голоморфного многообразия. Вычислите* $H^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3)$, *и сделайте выводы.*