**НМУ, Комплексно аналитические многообразия
и голоморфные расслоения. Листок 2.
Разное. 17.05.2018.**

Задача 1. По аналогии с числами Бетти $b^r(X) = \dim H^r(X, \mathbb{C})$ обозначим через $b_0^r(X)$ размерность пространства примитивных классов когомологий степени r кэлерова многообразия X. Доказать, что для компактного кэлерова многообразия X комплексной размерности n при $r \leqslant n$ верно равенство

$$b_0^r(X) = b^r(X) - b^{r-2}(X).$$

Задача 2. Доказать, что при $1 \leqslant q \leqslant n-1$ и всех k

$$H^q(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{CP}^n}(kH)) = 0.$$

Указание: при $k < 0$ примените двойственную теорему Кодаиры об обращении в ноль, при $k \geqslant 0$ воспользуйтесь тем, что $\mathscr{O}_{\mathbb{CP}^n}(kH) = \Omega^n_{\mathbb{CP}^n}(kH - K_{\mathbb{CP}^n})$.

Задача 3. Докажите вторую теорему Кодаиры об обращении в нуль. Пусть M компактное комплексное многообразие и $L \longrightarrow M$ положительное линейное расслоение. Тогда для любого голоморфного расслоения E существует такое μ_0, что при $q > 0$, $\mu \geqslant \mu_0$ верно

$$H^q(M, \mathscr{O}(L^\mu \otimes E)) = 0.$$

Задача 4. Докажите, что если $M \subset \mathbb{CP}^N$ подмногообразие проективного пространства, то каждое линейное расслоение на M представляется в виде $L = [D]$ для некоторого дивизора D, то есть

$$\mathrm{Pic}(M) \cong \mathrm{Div}(M)/\sim,$$

где $\sim$ — линейная эквивалентность дивизоров.

Задача 5. Докажите теорему Лефшеца об $(1,1)$-классах: каждый класс когомологий

$$\gamma \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

на подмногообразии $M \subset \mathbb{CP}^N$ является аналитическим; более того, $\gamma = \eta_D$ для некоторого дивизора D на M.

Задача 6. Кэлерова метрика $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ на многообразии M такая, что ассоциированная $(1,1)$-форма ω даёт рациональный когомологический класс

$$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Q}),$$

называется *метрикой Ходжа.* Подразумевая фиксированную метрику, иногда говорят, что само многообразие M ходжево. Докажите, что комплексно-аналитическое подмногообразие ходжева многообразия само является ходжевым многообразием.

Задача 7. Докажите, что все неособые комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}P^n$ являются многообразиями Ходжа.

Задача 8. Докажите, что если усреднить на торе $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ ходжеву метрику, то получится ходжева метрика с теми же периодами.