1. Вокруг многочленов Шура

Задача 1. При помощи трюка Линдстрема–Гесселя–Вьенно докажите вторую формулу Якоби–Труди: $s_\lambda = \det(e_{\lambda_i - i + j})$.

Задача 2 (задача о выборах). На выборах n кандидатов набрали $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ голосов (в порядке убывания). Какова вероятность того, что в каждый момент времени порядок кандидатов был таким же, как в конце голосования?

Задача 3. Пусть диаграмма Юнга λ представлена как объединение вложенных *крюков* с длинами «рук» $a_1, \dots, a_k$ и «ног» $\ell_1, \dots, \ell_k$. Пусть $s_{(a|\ell)}$ — многочлен Шура для крюка с рукой a и ногой ℓ. Докажите *формулу Джамбелли*:

$$s_\lambda = \det(s_{(a_i|\ell_j)})_{i,j=1}^k.$$

Задача 4. Выведите формулы Пьери из правила Литтлвуда–Ричардсона.

Задача 5. Докажите, что число Костки $K_{\lambda\mu} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \geq \mu$, т.е. μ получается из λ «осыпанием вниз» некоторых клеточек.

Задача 6. Докажите тождества

$$K_\lambda = \sum_{\lambda \in \mu \otimes 1} K_\mu, \qquad (1 + |\lambda|) K_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1} K_\mu, \qquad \sum_{|\lambda| = n} K_\lambda^2 = n!.$$

Задача 7. Пусть $p_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ — *ньютоновские степенные суммы*. Докажите, что

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^k k e_k = 0.$$

(Мы считаем, что $e_k = 0$ при $k > n$).

Задача 8. Докажите следующие детерминантные тождества:

$$\textbf{а)}\ p_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \dots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \dots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}; \textbf{б)}\ k!\cdot e_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

2. Массивы

Задача 9. Докажите соотношение кос для операций уплотнения массивов: $D_j D_{j+1} D_j = D_{j+1} D_j D_{j+1}$.

Задача 10. Докажите соотношение кос для действия симметрической группы на массивах.

Задача 11. Пользуясь правилом Литтлвуда–Ричардсона, вычислите в Λ_3 произведение $s_{(1,1)} \cdot s_{(2,1)}$ двумя способами и убедитесь, что получается одно и то же.

3. Симметрические группы

Задача 12. Перестановка w называется *биграссмановой*, если и w, и w^{-1} грассмановы, т.е. имеют единственный спуск. Опишите все биграссмановы перестановки.

Задача 13. Перестановка w называется *почти возрастающей*, если не существует таких $i < j < k$, что $w(i) > w(j) > w(k)$. Покажите, что число почти возрастающих перестановок в S_n есть число Каталана $C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Задача 14. Найдите все приведенные слова для перестановки $w = 31542 \in S_5$ и нарисуйте соответствующий граф Брюа (вершины графа — приведенные слова, две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда два слова получаются друг из друга элементарным соотношением).

4. Многочлены Шуберта

Задача 15. Покажите, что многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ является мономом тогда и только тогда, когда w не содержит паттерна 132 (т.е. нет таких $i < j < k$, что $w(i) < w(k) < w(j)$). Что можно сказать про соответствующий (единственный) pipe dream?

Задача 16. Пусть w — *грассманова перестановка*, т.е. перестановка с единственным спуском. Докажите, что многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ равняется многочлену Шура для некоторого разбиения. Что это за разбиение? Можете ли вы построить биекцию между pipe dreams и таблицами Юнга этого разбиения?

Задача 17. Пусть $w = [1, n, n-2, \dots, 3, 2]$. Докажите, что $\mathfrak{S}_w(1, \dots, 1) = C(n)$ есть n-е число Каталана.

Задача 18. Выведите формулу перехода Ласку из формулы Монка.

Задача 19. Вычислите $\mathfrak{S}_{[1432]}$, многократно пользуясь формулой перехода Ласку.

Задача 20. Докажите, что многочлен Шуберта, определенный комбинаторно (при помощи pipe dreams), удовлетворяет формуле перехода Ласку. (Разберите доказательство, намеченное в лекциях Кнутсона).

Задача 21. Пусть $a_1 < \dots < a_k$. Выведите из формулы Монка, что

$$\mathfrak{S}_{s_{a_1}} \dots \mathfrak{S}_{s_{a_k}} = \sum_w \mathfrak{S}_w,$$

где сумма берется по множеству почти возрастающих перестановок w, имеющих приведенное слово, которое получается перестановкой из слова $a_1 \dots a_k$.

По поводу сдачи экзамена пишите Е. Ю. Смирнову, `esmirnov@hse.ru`.