

Клеточная аппроксимация, отображения сфер и немного расслоений

Задача 2.1. а) Клеточное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда линейно связан его 1-скелет, $X^{(1)}$.

б) Фундаментальная группа клеточного пространства зависит только от его 2-скелета: $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{(2)})$.

Задача 2.2. а) При $k < n$ любое отображение из S^k в S^n гомотопно постоянному.

б) Сфера S^∞ (сфера в множестве *финитных* последовательностей) стягиваема.

Задача 2.3. а) При $k > 1$ любое отображение из S^k в S^1 гомотопно постоянному.

б*) Расслоения Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ и $S^7 \rightarrow S^4$ не гомотопны постоянным отображениям. (В этом пункте можно пользоваться утверждениями из предыдущего листка.)

Задача 2.4. Постройте нетривиальное расслоение над окружностью со слоем окружность. Что является его тотальным пространством?

Задача 2.5. Постройте расслоение, найдите его слой

а) $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$; б) $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$; в) $\mathbb{R}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$; г) $\mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$.