Гомотопические группы и гомотопический тип

Задача 9.1. Пусть M — односвязное замкнутое трехмерное многообразие. Докажите, что существует отображение $S^3 \to M$ индуцирующее изоморфизм всех групп гомологий (и, как следствие, M гомотопически эквивалентно сфере).

Задача 9.2. Пусть M — трехмерное многообразие, $\pi_1(M)$ бесконечна, $\pi_2(M) = 0$. Докажите, что M — пространство типа $K(\pi, 1)$.

Задача 9.3. Хотя у пространств а) S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$; б) $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ и $S^3 \times \mathbb{R}P^2$ все гомотопические группы изоморфны, они гомотопически не эквивалентны.

Задача 9.4. Докажите при помощи теории препятствий, что $K(\pi, n)$ (связное клеточное пространство, у которого $\pi_n = \pi$, а остальные гомотопические группы тривиальны) единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Задача 9.5. Пространство n-элементных подмножеств $\mathbb{R}^\infty$ является пространством типа $K(S_n, 1)$.