

Основные понятия

- 1◊1.** Подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.
- 1◊2.** В хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.
- 1◊3.** Привести пример непрерывного взаимно однозначного отображения между компактными пространствами, которое не является гомеоморфизмом.
- 1◊4.** Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Доказать, что отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственно.
- 1◊5.** Открытое инъективное отображение является вложением (в смысле индуцированной топологии). Аналогично, замкнутое инъективное отображение является вложением.
- 1◊6.** Открытое сюръективное отображение является фактор-отображением (в смысле фактор-топологии). Аналогично, замкнутое сюръективное отображение является фактор-отображением.
- 1◊7. а)** Индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.
- б)** Фактор-топология на X/\sim является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \rightarrow X/\sim$ непрерывно.
- в)** Докажите, что топология произведения является самой грубой (слабой), относительно которой отображения проекции непрерывны.
- 1◊8. а)** Если $A \subset X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто.
- б)** Приведите пример, когда X хаусдорфово, а $A \subset X$ — замкнуто, но X/A не хаусдорфово.
- 1◊9.** Проверьте универсальное свойство **а)** произведения; **б)** расслоенного произведения; **в)** склейки.
- 1◊10.** Опишите произведения, копроизведения и кодекартовы квадраты в категории **а)** абелевых групп; **б*)** групп; **в)** топологических пространств с отмеченной точкой.
- 1◊11.** Доказать, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова* и является одним из самых значимых результатов общей топологии. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора (полезно самостоятельно вывести аксиому выбора из теоремы Тихонова или разобрать доказательство).
- 1◊12.** Канторово множество гомеоморфно $\prod_{\mathbb{N}}\{0, 1\}$.
- 1◊13.** Верно ли что топология на Y^X совпадает с топологией произведения $\prod_{x \in X} Y$ для произвольного пространства X ?