Экспоненциальный закон

2◇1. Имеет место гомеоморфизм

$$\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z) \qquad \text{или} \qquad (Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

2◇2. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно.
Если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi\colon \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления*

$$e\colon Y \times \mathcal{C}(Y, Z) \to Z, \qquad (y, f) \mapsto f(y)$$

непрерывно.

2◇3 (экспоненциальный закон). Определено каноническое отображение

$$\Phi\colon \mathcal{C}(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \qquad \text{или} \qquad \Phi\colon Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X,$$

при котором отображение $f\colon X \times Y \to Z$ переходит в отображение $\Phi(f)\colon X \to \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$.
Доказать, что если X хаусдорфово, а Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм.

Операции над топологическими пространствами

2◇4. Докажите, что для CW-комплексов джойн ассоциативен.

2◇5. Докажите, что $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ и $S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$.

2◇6. Пусть (X, x_0), (Y, y_0) суть пространства с отмеченными точками. Докажите, что пространства

$$X * Y / (X * \{y_0\} \cup \{x_0\} * Y) \quad \text{и} \quad \Sigma(X \wedge Y)/\Sigma(\{x_0\} \wedge \{y_0\})$$

гомеомоморфны.

2◇7. Пусть $\underline{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ — набор CW-комплексов. Обозначим $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ подпространство в произведении $\prod\limits_{j=1}^{m} CX_j$, состоящее из точек, хотя бы одна координата которых лежит в основании конуса. Докажите, что $Z(C\underline{X}, \underline{X})$ гомеоморфно $X_1 * \ldots * X_m$.

2◇8. Докажите, что линейно связное пространство связно. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

2◇9. Покажите, что склейкой двух полноторий $S^1 \times D^2$ можно получить **а)** произведение $S^1 \times S^2$; **б)** сферу S^3; **в*)** проективное пространство $\mathbb{R}P^3$.