HEP

5⋄1. а) Докажите, что $\Sigma(S^1 \times S^1) \simeq S^2 \vee S^2 \vee S^3$.
б) Чему гомотопически эквивалентно $\Sigma(X \times Y)$?

5⋄2*. Пусть $A \subset X$ — ректракт. Докажите, что $\Sigma X \simeq \Sigma(X/A) \vee \Sigma A$.

Фундаментальная группа

▷ Все пространства по умолчанию считаются линейно связными. Пользоваться теоремой ван Кампена в этом листке *нельзя*.

5⋄3. Докажите, что произведение петель (в точке x_0) обладает свойствами:
а) если $\varphi \sim \varphi'$ и $\psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$,
б) $(\varphi\psi)\chi \sim \varphi(\psi\chi)$ для любых петель φ, ψ, χ,
в) если ε — постоянная петля, т.е. $\varepsilon(t) = x_0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\varphi\varepsilon \sim \varepsilon\varphi \sim \varphi$ для любой петли φ,
г) для петли φ определим петлю $\overline{\varphi}$ как $\overline{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$; тогда $\varphi\overline{\varphi} \sim \overline{\varphi}\varphi \sim \varepsilon$.

5⋄4. Отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны и таковы, что $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Верно ли, что $f_* = g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$?

5⋄5. а) Докажите, что фундаментальная группа CW-комплекса определяется его 2-остовом, т. е. $\pi_1(X) = \pi_1(X^{(2)})$.
б) Вложение $X^{(1)} \hookrightarrow X$ индуцирует сюръецию $\pi_1(X^{(1)}) \to \pi_1(X)$.
в) Вычислите фундаментальную группу сферы с диаметром.

▷ Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *звёздным*, если существует такая точка $x_0 \in X$, что для всех $x \in X$ отрезок с концами x_0, x целиком лежит в X.

5⋄6. Пусть X — звёздное множество, тогда $\pi_1(X) = 0$. В частности, $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = 0$.

5⋄7. Вычислите фундаментальную группу **а)** S^n, **б*)** $\mathbb{R}P^n$, **в)** $\mathbb{C}P^n$.

5⋄8. а) Докажите, что $\mathbb{R}$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 1$. **б)** То же самое для $\mathbb{R}^2$.

5⋄9. Докажите, что $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

5⋄10. а) Вычислите $\pi_1(T^2)$. **б)** Докажите, что полноторие не ретрагируется на свою границу.

5⋄11. а) Пусть M — лента Мёбиуса. Вычислите $\pi_1(M)$.
б) Докажите, что лента Мёбиуса не ретрагируется на свою граничную окружность.

5⋄12 (Теорема Борсука-Улама). Пусть $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Тогда существует такая точка $x \in S^2$, что $f(x) = f(-x)$.

5⋄13. Сфера покрыта тремя замкнутыми множествами. Тогда хотя бы одно из них содержит пару диаметрально противоположных точек.

5⋄14. Докажите, что любое непрерывное отображение букета из трёх отрезков в себя имеет неподвижную точку.

▷ *Топологической группой* называется пространство G с заданной на нём структурой группы, для которой отображения умножения $G \times G \xrightarrow{(g,h)\mapsto gh} G$, и взятия обратного $G \xrightarrow{g\mapsto g^{-1}} G$, являются непрерывными.

5⋄15. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы абелева.