Комплексный анализ #1 **(НМУ, 12 февраля 2019)**

---

1. Найдите ошибку в рассуждении:

$$z^2 = (-z)^2 \Rightarrow \operatorname{Arg}(z^2) = \operatorname{Arg}\big((-z)^2\big) \Rightarrow 2\operatorname{Arg} z = 2\operatorname{Arg}(-z) \Rightarrow \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(-z) \Rightarrow \operatorname{Arg} i = \operatorname{Arg}(-i)$$

(последнее утверждение в этой цепочке, очевидно, неверно).

•2. (i) Доказать круговое свойство ДЛО и свойство сохранения симметрии относительно обобщенных окружностей при ДЛО. (ii) Доказать, что множество всех ДЛО образуют некоммутативную группу Λ относительно операции композиции отображений, изоморфную группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$. Найти все сопряженные классы в группе Λ.

3. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке $z = 1$, и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Доказать, что этот ряд сходится равномерно в секторе $\{\pi - \alpha \leqslant \arg(z-1) \leqslant \pi + \alpha,\ |z-1| \leqslant \cos\alpha\}$.

4. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, и пусть $D(0,R)$, $R > 0$, — круг сходимости соответствующего степенного ряда. Доказать, что если $|f(z)|$ достигает локального максимума в точке $z = 0$, то $f \equiv c_0$.

5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и пусть $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, а $c_n = \alpha c_{n-1} + \beta c_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Доказать, что радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ положителен, и найти сумму этого ряда.

6. Доказать, что множество всех корней производной $P'(z)$ произвольного многочлена $P(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ лежат в выпуклой оболочке точек z_k, $k = 1, \ldots, n$ (корней многочлена P).

•7. Пусть f — функция, голоморфная в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$. Доказать, что если одна из следующих функций:

$$\operatorname{Re} f; \quad \operatorname{Im} f; \quad |f|; \quad \arg f$$

постоянна в G, то и f постоянна в G.

8. Пусть f — голоморфная функция. Выразить через f и f' следующие функции:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(|f(z)|\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Re} f(z)\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Im} f(z)\big).$$

•9. Пусть функция f вещественно дифференцируема в точке z_0. Доказать, что множество предельных значений выражения

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

при $z \to z_0$ образует окружность с центром в точке $f'_z(z_0)$ и радиусом $|f'_{\bar z}(z_0)|$.

10. Найти все функции f класса $Hol(\mathbb{C})$, у которых $|f|$ зависит только от $\operatorname{Re} z$, а $\arg f$ зависит только от $\operatorname{Im} z$ (например, e^z).