Комплексный анализ **Листок #2 (НМУ, 19 февраля 2019)**

---

1. а) Доказать, что функция $f(z) = \sqrt{z^2}$ распадается над всем $\mathbb{C}$ на две непрерывные ветви.

б) Проверить, что в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $\operatorname{Ln} z$ не имеет непрерывных ветвей.

в) Описать все непрерывные ветви функции $\sqrt[n]{z}$ в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_-$ — это отрицательная вещественная полуось.

г) Пусть функция f голоморфна и однолистна в $\mathbb{D}$ и пусть $f(0) = 0$. Доказать, что функция $\sqrt[n]{f(z^n)}$ распадается в $\mathbb{D}$ на n голоморфных и однолистных ветвей.

•2. Найти какие-либо элементарные функции, конформно отображающие области, изображенных на рисунках (см. на обороте; необходимо решить 4 задания по своему выбору) на единичный круг.

3. Конформно отобразить круг $\{|z - 2i| < 2\}$ с разрезами $[0, 2ti)$ и $[(4-s)i, 4i)$, $t, s \in [0,1]$, на этот же круг без разрезов со следующим соответствием границ: $2ti \mapsto 0$, $(4-s)i \mapsto 4i$, $2+2i \mapsto 2+2i$. Проследить динамику устранения разрезов при $t \to 0$ и $s \to 0$.

4. Доказать, что функция $az^2 + bz + c$ однолистна в выпуклой области в том и только том случае, когда она локально однолистна в этой области.

•5. а) Доказать существование интеграла $\int_\gamma f\, dz$, где γ — спрямляемый путь в $\mathbb{C}$, а f — функция класса $C([\gamma])$.

б) Для пути $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ класса C^1 и для функции $f \in C([\gamma])$ доказать, что

$$\int_\gamma f\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

6. а) Вычислить $\displaystyle\int_{\gamma_j} (x^2 + iy^2) dz$, $j = 1, 2$, где $\gamma_1(t) = t^2 + it$, а $\gamma_2(t) = t + it$, $t \in [0,1]$;

б) Для произвольного пути γ, соединяющего точки 0 и 1 и не проходящего через $\pm i$, вычислить $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$.

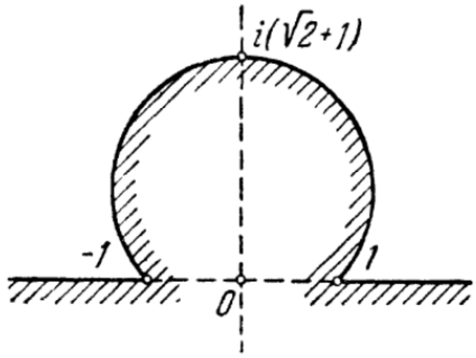
•7. Пусть $D = D(0, R)$, $f \in Hol(D) \cap C(\overline{D})$ и $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Доказать, что при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $|z| < R$ справедливы неравенства:

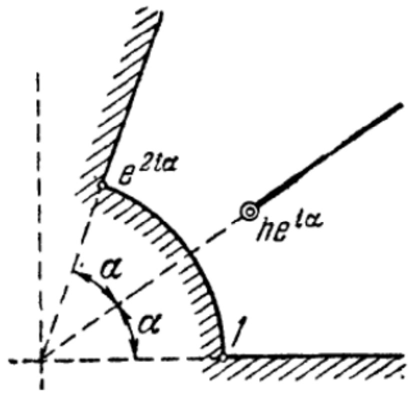
$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqslant \frac{MR}{(R - |z|)^{n+1}}, \qquad |f'(z)| \leqslant \frac{MR}{R^2 - |z|^2}.$$

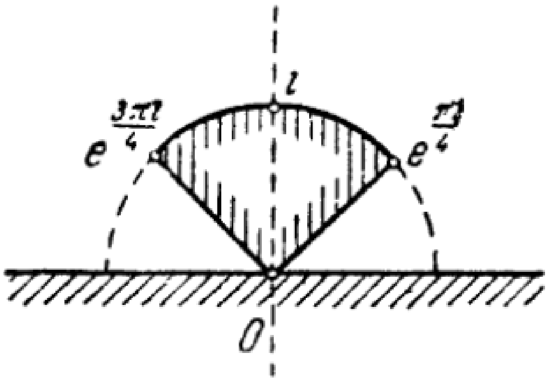
•8. Пусть f — целая функция ($f \in Hol(\mathbb{C})$) и для всех $z \in \mathbb{C}$ выполнена оценка $|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^p$, где C и $p > 0$ — фиксированные константы. Доказать, что f — полином степени не выше p.

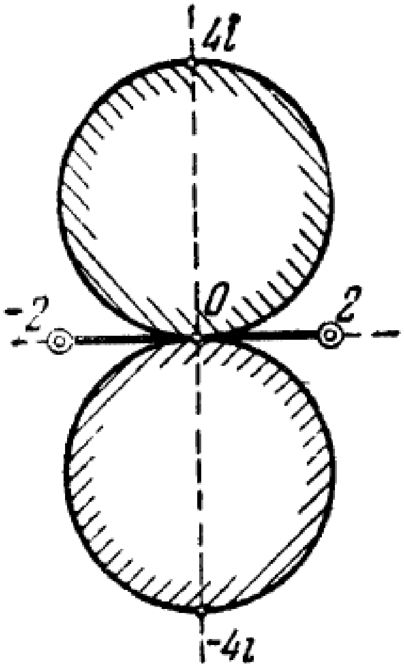
9. Пусть функция h голоморфна в некоторой области G, а ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ сходится. Доказать, что произведение $\displaystyle\prod_1^\infty (1 + c_k h(z))$ сходится в G к *голоморфной* функции.

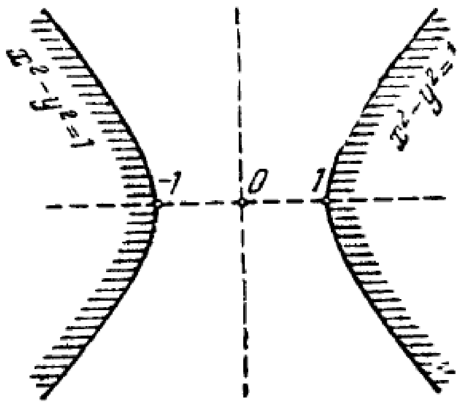
10. Пусть $P(z) = z^n + \ldots$ — полином степени n с единичным старшим коэффициентом. Доказать, что если $\max_{|z|=1} |P(z)| \leqslant 1$, то $P(z) = z^n$.

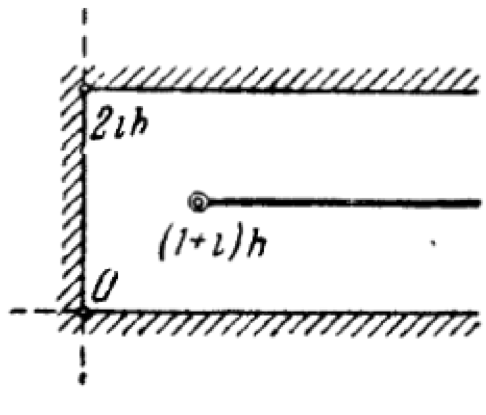

i(√2+1)
-1
1
0


e^{2iα}
he^{iα}
α
α
1


i
e^{3πi/4}
e^{πi/4}
0


4i
-2
0
2
-4i


x²-y²=1
x²-y²=1
-1
0
1


2ih
(1+i)h
0