1. а) Найти на $\mathbb{T}$ все особые точки суммы ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

б) Доказать, что любая точка $z \in \mathbb{T}$ является особой точкой для суммы ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

•2. Пусть $f \in Hol(\varepsilon\mathbb{D})$, $\varepsilon > 0$, такова, что $f(z) = z + f(z^2)$, а $f(0) = 0$. Показать, что $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Найти круг сходимости этого ряда и все особые точки его суммы на границе этого круга.

3. Пусть $f \in Hol(\mathbb{C})$ и пусть для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ ряд $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ имеет хотя бы один нулевой коэффициент a_n. Доказать, что f — это многочлен.

•4. а) Найти все изолированные особые точки однозначного характера следующих функций и указать их тип. Чем является ∞ для этих функций: $\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$, $e^{\operatorname{ctg}(\pi/z)}$, $\sin\left(e^{1/z}\right)$.

б) Разложить функцию в ряд Лорана во всех подходящих кольцах с центром в точке $a = 0$: $\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)}$, $\dfrac{e^z}{z(1-z)}$. Найти главную часть ряда Лорана функции $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в точке $a = i$.

в) Проверить, что функция $f(z) = \operatorname{tg} z$ конформно отображает полосу $\left\{\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{4}\right\}$ на $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Разложить обратное отображение в ряд Лорана при $|z| > 1$.

5. Пусть a — изолированная особая точка однозначного характера для функции f. Доказать, что если $\lim_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{|z-a|=\varepsilon} |f(z)|\,|dz| = 0$, то a — устранимая особая точка для f. Доказать, что если в некоторой окрестности точки a справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant A|z-a|^{-m}$ при $A, m \geqslant 0$, то a — это полюс функции f порядка не выше, чем m, или устранимая особая точка.

•6. Пусть a — изолированная особая точка однозначного характера для функции f. Доказать, что если $\operatorname{Re} f(z) > 0$ в некоторой окрестности точки a, то a — устранимая особая точка функции f. Доказать, что если a — это не устранимая особая точка функции f, то в сколь угодно малой окрестности точки a функция $\operatorname{Re} f$ принимает все вещественные значения.

7. Пусть $z_0 \neq 0$, а последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ такова, что $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - z_0\right|^{1/n} < 1$. Доказать, что круг $D(0, |z_0|)$ — это круг сходимости степенного ряда $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, а функция f имеет на окружности $\partial D(0, |z_0|)$ единственную особую точку — полюс первого порядка в точке $z = z_0$.

8. а) Пусть функция $f \in Hol(0 < |z| < 1)$ такова, что функция $|z|^e|f(z)|$ ограничена при $z \to 0$. Доказать, что функция $z^2 f(z)$ также ограничена при $z \to 0$.

б) Доказать или опровергнуть следующее утверждение: для любой функции $f \in Hol(\mathbb{C} \setminus \lambda\overline{\mathbb{D}})$, $\lambda > 1$, существует функция $F \in Hol(\mathbb{C})$ такая, что $f(z) - F(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

9. Пусть последовательность $\{a_n\} \subset D(a, R)$ такова, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$. Пусть функция $f \in Hol\big(D(a,R) \setminus \{a, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}\big)$ имеет в точках a_n, $n \geqslant 1$, полюсы. Доказать, что для любого $b \in \mathbb{C}$ найдется последовательность $\{z_n\} \subset D(a, R) \setminus \{a\}$, $z_n \to a$ при $n \to \infty$, такая, что $f(z_n) \to b$ при $n \to \infty$.

•10. а) Найти общий вид конформных отображений $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty$ на $\mathbb{C}_\infty$.

б) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{D}$. Можно ли отобразить конформно $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ на $\mathbb{D} \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$?