•1. Доказать, что для любой функции $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ найдется последовательность многочленов комплексного переменного $\{P_n\}$ такая, что $P_n \to f$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$ при $n \to \infty$. Доказать аналогичное утверждение в случае, когда вместо $\mathbb{D}$ рассматривается ограниченная область G, звездообразная относительно какой-либо точки $a \in G$.

2. а) Привести пример компакта K такого, что $K^\circ = \varnothing$ и $C(K) \neq R(K)$.

б) Привести пример компакта K такого, что $K^\circ \neq \varnothing$, K° — это связное, односвязное и плотное в K множество, и $\mathit{Hol}(K^\circ) \cap C(K) \neq R(K)$.

3. Доказать теорему Гартогса–Розенталя: если K — компакт в $\mathbb{C}$, а $\mathrm{Area}(K) = 0$, то $C(K) = R(K)$.

•4. Пусть $g \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\mathrm{Supp}(\overline{\partial} g)$ — компакт и пусть

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} g(\zeta)\, dm_2(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Доказать, что $g - F \in \mathit{Hol}(\mathbb{C})$, и что $g \equiv F$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$.

•5. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть $f \in \mathit{Hol}(G \setminus A) \cap C(\overline{G} \setminus A)$, где $A = \mathcal{P}(f, G)$ — множество полюсов функции f в G.

а) Доказать, что для любого $a \in \mathbb{C}$, $|a| > \|f\|_{\partial G}$, верно равенство $\#\mathcal{Z}(f - a, G) = \#\mathcal{P}(f, G)$.

б) Доказать, что если $\mathrm{Im}\, f(z) \neq 0$ при $z \in \partial G$, то $\#\mathcal{Z}(f, G) = \#\mathcal{P}(f, G)$.

•6. а) Найти число нулей многочлена $z^4 + z^3 - 4z + 1$ в кольце $1 < |z| < 3$.

б) Найти число нулей функции $e^z - 4z + i$ в круге $\mathbb{D}$.

в) Найти число корней уравнения $z^3 + 2z^2 + 3z + 8 = 0$ в левой полуплоскости, в верхней полуплоскости, в полукруге $\{|z| < 4,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

г) Пусть $a, b > 0$. Найти число корней уравнения $z^{10} + az^9 + b = 0$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$.

7. а) Доказать, что уравнение $\mathrm{tg}\, z = z$ имеет только вещественные корни.

б) Доказать или опровергнуть, что для любого $\rho > 0$ уравнение $(z+i)\sin z = 2019$ имеет в полосе $|\mathrm{Im}\, z| < \rho$ бесконечно много решений.

8. Пусть $a_n > \cdots > a_1 > a_0 \geqslant 0$. Доказать, что функция $a_0 + a_1 \cos z + \cdots + a_n \cos(nz)$ имеет только вещественные нули.

9. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ и $f(0) \neq 0$. Доказать, что существует такое $\rho > 0$, что для любого w с условием $0 < |w| < \rho$ уравнение $z^m = wf(z)$ имеет в $\mathbb{D}$ ровно m различных корней.

10. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ и пусть $|f(z)| = 1$ при всех $z \in \mathbb{T}$. Доказать, что функция f имеет вид $f(z) = e^{i\varphi} \prod\limits_{k=1}^{N} \dfrac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, а $N \geqslant 0$ — целое и a_k, $k = 1, \ldots, N$ — некоторые точки круга $\mathbb{D}$.