•1. а) Найти все кольца вида $\{\rho_1 < |z| < \rho_2\}$, конформно эквивалентные данному кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leqslant r < R < \infty$. б) Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

•2. Доказать, что любой конформный изоморфизм одного прямоугольника на другой прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

3. Пусть $\mathit{\Gamma} \subset \mathbb{T}$ — дуга единичной окружности. Доказать, что если $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D} \cup \mathit{\Gamma})$ и $f|_{\mathit{\Gamma}} = 0$, то $f \equiv 0$.

4. Пусть функция $g(z; z_1, z_2, z_3)$ конформно отображает полукруг $\Omega := \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на тот же самый полукруг с соответствием границ $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = i$, $g(z_3) = -1$, где z_1, z_2, z_3 — точки на $\partial\Omega$. При каких условиях на точки z_1, z_2, z_3 это конформное отображение продолжается до конформного отображения

а) круга $\mathbb{D}$ на полуплоскость $\mathbb{C}_+$ с разрезом по дуге $e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$?

б) круга $\mathbb{D}$ на круг $\mathbb{D}$ с разрезами по отрезкам $[-1, -\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$?

•5. С использованием принципа симметрии найти какие-либо конформные отображения областей, изображенных на рисунках (см. на обороте; необходимо решить 4 задания по своему выбору), на верхнюю полуплоскость.

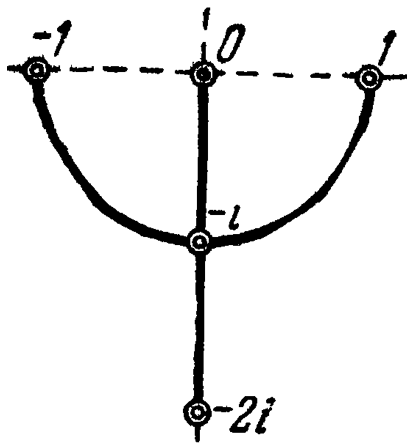
6. Пусть G — односвязная область такая, что $0 \in G$ и ∂G содержит более одной точки. Пусть $\mathcal{H}(G) := \{h \in \mathit{Hol}(G) \colon h(0) = 0,\ h'(0) = 1\}$. Доказать, что минимум величины $\sup_{z \in G} |h(z)|$ при $h \in \mathcal{H}(G)$ достигается на единственной функции f, а именно на конформном отображении G на круг $\{|z| < R\}$, где R — конформный радиус области G в точке 0.

7. Пусть K — связный компакт в $\mathbb{C}$, содержащий более одной точки. Пусть φ — конформное отображение области $\Omega := \mathbb{C}_\infty \setminus K$ на $\mathbb{D}$ с условиями $\varphi(\infty) = 0$ и $\varphi'(\infty) > 0$. Доказать, что $\varphi'(\infty) = \sup f'(\infty)$, где sup берется по всем функциям $f \in \mathit{Hol}(\Omega)$ таким, что $\|f\|_\Omega \leqslant 1$ и $f(\infty) = 0$.

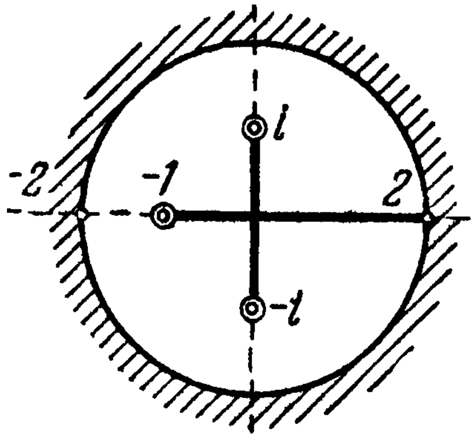
8. Пусть G — ограниченная односвязная область с гладкой границей, и пусть функция $f \in \mathit{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$ такова, что $\operatorname{Im} f$ постоянна на ∂G. Доказать, что f постоянна в G.

9. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D})$, $f(0) = 1$, и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$ всюду в $\mathbb{D}$. Доказать, что $|f'(0)| \leqslant 2$.

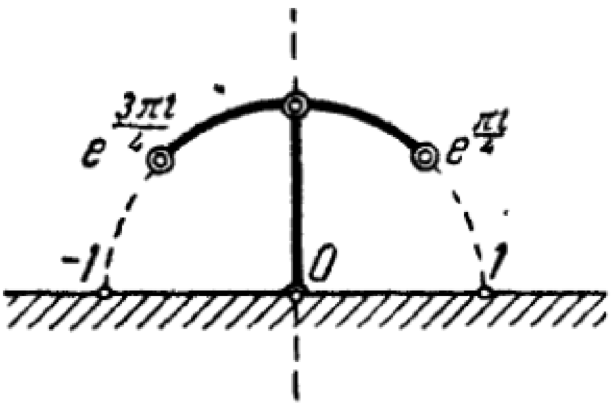
•10. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$, и $f'(0) = 1$. Доказать, что выпуклая оболочка множества $f(\mathbb{D})$ содержит круг $|w| < 1/2$. Показать, что значение $1/2$ не может быть улучшено.



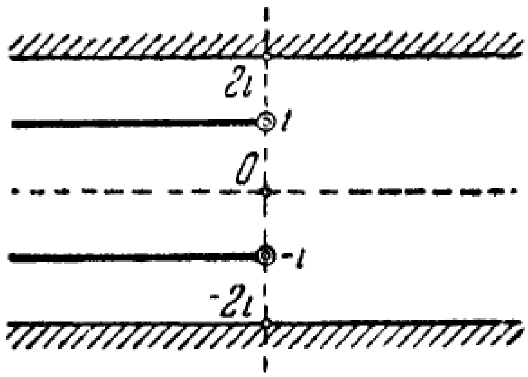
-1
0
1
-i
-2i



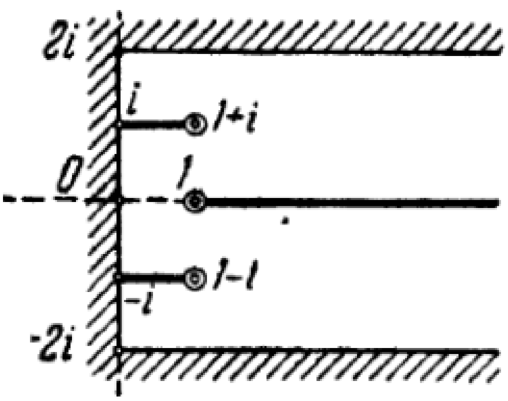
i
-2
-1
2
-i



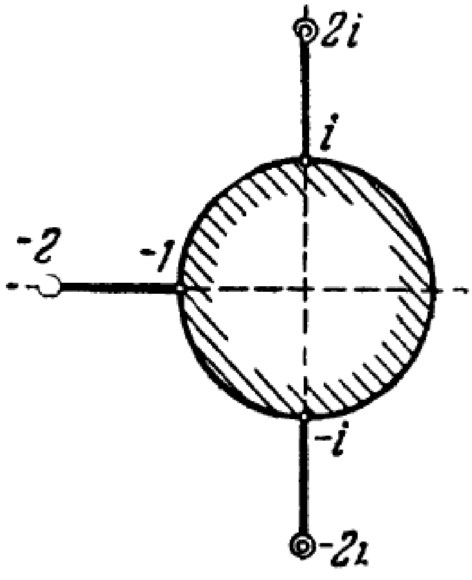
$e^{\frac{3\pi i}{4}}$
$e^{\frac{\pi i}{4}}$
-1
0
1



2i
i
0
-i
-2i



2i
i
1+i
0
1
1-i
-i
-2i



2i
i
-2
-1
-i
-2i