

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.  
Векторные расслоения-II. 22.03.2019.

**Задача 1.** Пусть  $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$  универсальное (тавтологическое) расслоение. Доказать, что сумма  $T\mathbb{R}P^n$  и тривиального расслоения ранга 1 изоморфна  $\underbrace{E^* \oplus \dots \oplus E^*}_{n+1 \text{ раз}}$ .

**Задача 2.** Пусть  $Y$  — подмногообразие  $X$ . Тогда для каждой точки  $x \in Y$  можно определить векторное пространство  $N_x := T_x X / T_x Y$ . Определите на дизъюнктном объединении  $NY = \bigsqcup_{x \in Y} N_x$  естественную структуру гладкого многообразия и локально тривиального векторного расслоения над  $Y$ . Это расслоение называется нормальным расслоением.

**Задача 3.** Найдите нормальное расслоение к  $M$  при диагональном вложении  $M \hookrightarrow M \times M$ , то есть  $x \mapsto (x, x)$ .

**Задача 4.** Найдите нормальное расслоение к  $\mathbb{R}P^n$  при естественном вложении  $\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ .

**Задача 5.** Докажите, что сумма касательного расслоения к двумерной сфере и тривиального расслоения ранга 1 является тривиальным расслоением ранга 3.

**Задача 6.** Пусть  $E_k \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$  универсальное (тавтологическое) расслоение. Пусть однородные координаты точек  $G_k(\mathbb{R}^n)$  задаются с помощью  $k \times n$  матрицы  $Z$ , то есть точка есть класс эквивалентности  $[Z]$  относительно отношения эквивалентности  $Z \sim gZ$ ,  $g \in GL(k)$ . Доказать, что задающий  $E_k \subset G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  ортогональный проектор  $P_{[Z]} : \mathbb{R}^n \rightarrow (E_k)_{[Z]}$  задается формулой  $P(v) = vZ^*(ZZ^*)^{-1}Z$ , где  $Z^*$  означает сопряженный оператор, а элемент  $\mathbb{R}^n$  записан как вектор-строка  $v$ .

**Задача 7.** Пусть  $V_k(\mathbb{R}^N) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^N)$  естественное расслоение многообразия Штифеля над многообразием Грассмана. Каков его слой? Найти соответствующее ассоциированное векторное расслоение (то есть векторное расслоение с теми же склеивающими коциклами).

**Задача 8.** Пусть  $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$  универсальное (тавтологическое) расслоение. Тривиально ли  $E \otimes E$ ?

**Задача 9.** Доказать, что в любом векторном расслоении существует метрика, евклидова в вещественном случае и эрмитова в комплексном случае.

**Задача 10.** Является ли ориентируемым тривиальное расслоение над  $\mathbb{R}P^1$ ? Является ли ориентируемым универсальное расслоение  $\gamma^1$  над  $\mathbb{R}P^1$ ?