ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Аффинные пространства и аффинные преобразования.

Зафиксируем натуральное число n и n-мерное векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$ (чаще всего в наших примерах будет $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). *n-мерным аффинным пространством над полем* $\mathbb{C}$ называется пара, состоящая из множества L (его элементы называются точками) и отображения $L \times L \to V$, сопоставляющее каждой паре точек $a, b \in L$ вектор $\overrightarrow{ab} \in V$ так, чтобы выполнялись такие требования:

1) (правило треугольника) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$;
2) (аксиома откладывания) Для всякого вектора $v \in V$ и для каждой точки $a \in L$ существует ровно одна точка $b \in L$ такая, что $\overrightarrow{ab} = v$.

Из свойств 1–2 вытекает немедленно, что $\overrightarrow{ab} = 0 \Leftrightarrow a = b$, а также $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$. Более того, свойство 2 позволяет отождествить L с V, а именно: зафиксируем какую-нибудь точку $a \in L$ и сопоставим каждому вектору $v \in V$ точку $b \in L$ такую, что $\overrightarrow{ab} = v$. Согласно свойству 2 это соответствие будет взаимно однозначным; обозначим его S_a. При разном выборе $a \in L$ соответствия $S_a : V \to L$ будут различны: $\overrightarrow{S_a(v)S_b(v)} = \overrightarrow{ab}$ для любого $v \in V$ (докажите!).

Параллельный перенос $T_v : L \to L$ на вектор $v \in V$ сопоставляет каждой точке x такую точку y, что $\overrightarrow{xy} = v$. Тогда по правилу треугольника имеем $\overrightarrow{T_v(a)T_v(b)} = -\overrightarrow{aT_v(a)} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bT_v(b)} = -v + \overrightarrow{ab} + v = \overrightarrow{ab}$.

Предложение 1. *1) Если $a, b \in L$ — произвольные точки, для которых $\overrightarrow{ab} = v$, то $T_v = S_b S_a^{-1}$.*

2) Если отображение $T : L \to L$ обладает свойством $\overrightarrow{T(a)T(b)} = \overrightarrow{ab}$ для произвольных $a, b \in L$, то T — параллельный перенос.

3) T_v — обратимое преобразование, для которого $T_{v_1+v_2} = T_{v_1} \circ T_{v_2}$ и $T_v^{-1} = T_{-v}$.

Доказательство. 1: пусть $x \in L$ — произвольная точка и $\overrightarrow{ax} \stackrel{\text{def}}{=} w$; тогда $x = S_a(w)$. Пусть $y \stackrel{\text{def}}{=} S_b(w) = S_b S_a^{-1}(x)$; тогда по определению $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{by} = -w + v + w = v$. Следовательно, $y = T_v(x)$.

2: зафиксируем $a \in L$, и пусть $v \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{aT(a)}$. Для произвольной точки $b \in L$ по правилу треугольника имеем $\overrightarrow{bT(b)} = -\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{aT(a)} + \overrightarrow{T(a)T(b)} = v$, то есть $T(b) = T_v(b)$.

3 — упражнение. □

Пусть L_1, L_2 — аффинные пространства (возможно, разных размерностей), и отображение $B : L_1 \to L_2$ переводит равные векторы в равные векторы: $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt} \Rightarrow \overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$. Тем самым для каждого вектора $v \in V_1$ вектор $\widetilde{B}(v) \in V_2$ однозначно определен равенством $\widetilde{B}(v) = \overrightarrow{B(x)B(y)}$, где $x, y \in L_1$ — произвольная пара точек такая, что $\overrightarrow{xy} = v$. Таким образом, для каждого аффинного преобразования B определен оператор $\widetilde{B} : V_1 \to V_2$.

Рассмотрим теперь три точки $x, y, z \in L_1$ такие, что $\overrightarrow{xy} = v_1$, $\overrightarrow{yz} = v_2$. Тогда $\overrightarrow{xz} = v_1 + v_2$, и $\widetilde{B}(v_1 + v_2) = \overrightarrow{B(x)B(z)} = \overrightarrow{B(x)B(y)} + \overrightarrow{B(y)B(z)} = \widetilde{B}(v_1) + \widetilde{B}(v_2)$, т.е. оператор $\widetilde{B}$ аддитивен. Если $B_1 : L_1 \to L_2$ и $B_2 : L_2 \to L_3$ — отображения, переводящие равные векторы в равные, то, как нетрудно видеть, отображение $B \stackrel{\text{def}}{=} B_2 \circ B_2 : L_1 \to L_3$ также обладает этим свойством, причем $\widetilde{B} = \widetilde{B}_2 \circ \widetilde{B}_1$.

Преобразование B называется аффинным, если оператор $\widetilde{B}$ линеен, т.е. в дополнение к аддитивности обладает свойством $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{F}$.

Очевидно, композиция аффинных отображений аффинна и тождественное отображение аффинно, так что множество аффинных пространств и аффинных отображений является категорией. Множество обратимых аффинных отображений из аффинного пространства L в себя образует группу; ее обозначают $\mathrm{Aff}(L)$ и называют группой (обратимых) аффинных преобразований L.

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то взаимно однозначное соответствие $S_a : V \to L$ позволяет ввести в L топологию, перенеся ее с векторного пространства V. Как нетрудно видеть, от выбора точки a эта топология не зависит.

Теорема 1. *Вещественное аффинное отображение непрерывно. Напротив, непрерывное отображение вещественных аффинных пространств, переводящее равные векторы в равные, аффинно. Если преобразование B обратимо, то линейный оператор $\widetilde{B}$ также обратим. Отображение $B \mapsto \widetilde{B}$ на множестве обратимых аффинных преобразований является эпиморфизмом групп $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(V)$, ядром которого является множество параллельных переносов.*

Доказательство. Всякий непрерывный аддитивный оператор также и однороден, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и произвольного $v \in V$. Действительно, пусть вначале $\lambda \in \mathbb{N}$ — целое положительное число. Тогда $\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(v) + \dots + \widetilde{B}(v)$ (λ раз) $= \lambda \widetilde{B}(v)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\widetilde{B}(0) = \widetilde{B}(0+0) = \widetilde{B}(0) + \widetilde{B}(0)$, откуда $\widetilde{B}(0) = 0$. Если теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$ отрицательно, то $-\lambda \in \mathbb{N}$, откуда $\widetilde{B}(\lambda v + (-\lambda)v) = \widetilde{B}(\lambda v) - \lambda \widetilde{B}(v) = \widetilde{B}(0) = 0$, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$. Тем самым однородность доказана для целых λ.

Пусть теперь $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$. Мы знаем, что $q\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(q\lambda v) = \widetilde{B}(pv) = p\widetilde{B}(v)$, откуда вытекает однородность уже для рациональных λ.

Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ однородность теперь вытекает из непрерывности и того факта, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$: число λ, как и всякое вещественное число, является пределом последовательности рациональных чисел. Тем самым доказано, что $\widetilde{B} : V \to V$ — линейный оператор.

Пусть $B : L_1 \to L_2$ и $A : L_2 \to L_3$ — аффинные отображения. Возьмем вектор $v \in V_1$ и точки $x, y \in L_1$ таковы, что $\overrightarrow{xy} = v$. Тогда $\widetilde{AB}(v) = \overrightarrow{A(B(x))A(B(y))} = \tilde{A}(\overrightarrow{B(x)B(y)}) = \tilde{A}\widetilde{B}(v)$. Если теперь $B : L_1 \to L_2$ — обратимое аффинное отображение, то, поскольку $\widetilde{\mathrm{id}_L} = I$ (единичный оператор), имеем $\widetilde{B}\widetilde{B^{-1}} = I$, откуда $\widetilde{B^{-1}} = \widetilde{B}^{-1}$ — следовательно, оператор $\widetilde{B}$ обратим, и соответствие $B \mapsto \widetilde{B}$ обратимых операторов — гомоморфизм групп.

Докажем эпиморфность. Пусть $C : V \to V$ — линейный оператор. Выберем точку $a \in L$, и пусть $B(b)$ — такая точка пространства L, что $\overrightarrow{a, B(b)} = C(\overrightarrow{ab})$. Для произвольного вектора $v \in V$ рассмотрим точку $c \in L$ такую, что $\overrightarrow{bc} = v$; тогда $\widetilde{B}(v) = \overrightarrow{B(b), B(c)} = \overrightarrow{aB(c)} - \overrightarrow{aB(b)} = C(\overrightarrow{ab}) - C(\overrightarrow{ac}) = C(\overrightarrow{bc}) = Cv$. Из этого, в частности, вытекает, что если $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{b_1c_1}$, то $\overrightarrow{B(b), B(c)} = \overrightarrow{B(b_1), B(c_1)}$, то есть отображение B аффинно, и $\widetilde{B} = C$ — эпиморфность доказана.

Доказательство того, что ядро эпиморфизма $B \mapsto \widetilde{B}$ — множество параллельных переносов, — упражнение. ☐

Следствие. *Множество параллельных переносов является нормальной подгруппой $T \subset \mathrm{Aff}(L)$, и фактор-группа $\mathrm{Aff}(L)/T$ изоморфна группе $\mathrm{GL}(V)$.*

Следующая теорема описывает, во что переходят аффинные преобразования при отождествлении аффинного пространства с векторным.

Теорема 2. *Пусть L — аффинное пространство, $a \in L$ и $B : L \to L$ — аффинное преобразование. Тогда отображение $C \overset{def}{=} S_a^{-1} B S_a : V \to V$ имеет вид $C(v) = \widetilde{B}v + u$, где $u = \overrightarrow{aB(a)}$. Для всякого отображения вида $C(v) = Av + u$ существует и единственно аффиное преобразование $B : L \to L$, для которого $C = S_a^{-1} B S_a$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, и точка $p \in L$ такова, что $\overrightarrow{ap} = v$. Тогда имеем: $C(v) = S_a^{-1}(B(S_a(v))) = S_a(B(p)) = \overrightarrow{aB(p)} = \overrightarrow{aB(a)} + \overrightarrow{B(a)B(p)} = u + \widetilde{B}(\overrightarrow{ap}) = u + Av$. Обратно: пусть $C(v) = Av + u$ и $a \in L$. Положим $B = S_a C S_a^{-1}$. Тогда для произвольных точек $x, y \in L$ имеет место равенство $\overrightarrow{B(x)B(y)} = A\overrightarrow{xy}$. Тем самым, равные векторы переходят в равные. Поскольку линейный оператор A непрерывен, преобразование B также непрерывно и, следовательно, аффинно. ☐

Замечание. Преобразование C зависит от выбора точки a. Точнее, его "линейная часть" $\widetilde{B}v$ при изменении точки a сохраняется (оператор $\widetilde{B}$ определен однозначно и от выбора точки не зависит), а "свободный член" — вектор u — меняется: $u_b = \overrightarrow{bB(b)} = \overrightarrow{aB(a)} + \overrightarrow{B(a)B(b)} - \overrightarrow{ab} = u_a + (\widetilde{B} - I)\overrightarrow{ab}$, где $I : V \to V$ — тождественный оператор.

Пусть теперь W — векторное пространство размерности $m > n$, а $V \subset W$ — его подпространство размерности n. Для любой точки $a \in W$ рассмотрим множество $a + V \overset{\mathrm{def}}{=} \{a + v \mid v \in V\}$. Если теперь $x, y \in a + V$, то положим по определению $\overrightarrow{xy} \overset{\mathrm{def}}{=} y - x \in V$, наделяя тем самым $a + V$ структурой n-мерного аффинного пространства. $a + V$ называется аффинным подпространством W, параллельным V и проведенным через точку a. Нетрудно убедиться (проделайте!), что если $b \in L$, то аффинное подпространство, проведенное через b и параллельное V, совпадает с W. Аффинные подпространства, параллельные $\{0\}$, это точки; подпространства, параллельные прямым, называются аффинными прямыми.

Теорема 3. *Аффинные преобразования*

1) *переводят аффинные подпространства в аффинные подпространства. Обратимые аффинные преобразоования переводят прямые в прямые.*
2) *переводят отрезки в отрезки и сохраняют отношение длин параллельных отрезков.*

Доказательство. Пусть $B : L \to L$ — аффинное преобразование.

1: Пусть M — аффинное подпространство, параллельное векторному подпространству V. Зафиксируем точку $a \in M$, и пусть $x \in M$ — произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{ax} \in V$, откуда $\overrightarrow{B(a)B(x)} = \widetilde{B}(\overrightarrow{ax}) \in \widetilde{B}(V)$.

Поэтому x лежит в аффинном подпространстве R, параллельном векторному подпространству $\widetilde{B}(V)$ и проходящем через точку $B(a)$. Пусть теперь $y \in R$. Тогда $\overrightarrow{B(a)y} = \widetilde{B}v$ для некоторого $v \in V$. Отсюда вытекает, что $y = B(x)$, где x такова, что $\overrightarrow{ax} = v$. Следовательно, $x \in M$, и $y \in B(M)$, то есть $B(M) = R$.

Если $V = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая, то $B(M)$ состоит из всех точек y таких, что $\overrightarrow{B(a)y} = \lambda\widetilde{B}(v)$. Если $\widetilde{B}(v) \neq 0$, эти точки образуют аффинную прямую. Если же $\widetilde{B}(v) = 0$, то $B(M)$ состоит из одной точки и, следовательно, B не обратим.

2: Пусть $y \in [x,z]$, то есть $\overrightarrow{xy} = \lambda\overrightarrow{xz}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \lambda\overrightarrow{B(x)B(z)}$, то есть $B(y) \in [B(x)B(z)]$. Обратно, если $a \in [B(x)B(z)]$, то есть $\overrightarrow{B(x)a} = \lambda\overrightarrow{B(x)B(z)}$, то $a = B(y)$, где y — точка, для которой $\overrightarrow{xy} = \lambda\overrightarrow{xz}$.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ параллельны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{cd}$, где $\lambda = \pm|ab|\,/\,|cd|$. Но тогда $\overrightarrow{B(a)B(b)} = \widetilde{B}(\overrightarrow{ab}) = \lambda\widetilde{B}(\overrightarrow{cd}) = \lambda\overrightarrow{B(c)B(d)}$. □

Верно и обратное:

Теорема 4. *Непрерывное взаимно однозначное отображение $B : L \to L$, переводящее каждую аффинную прямую в аффинную прямую, является аффинным.*

Доказательство. Две аффинных прямых $\ell_1, \ell_2 \subset W$ называются параллельными, если они параллельны одной и той же прямой (одномерному подпространству) $\ell \subset W$ и не совпадают. Нетрудно проверить (докажите!), что параллельность эквивалентна тому, что прямые лежат в одной аффинной плоскости и не пересекаются.

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 параллельны. Тогда для любых точек $a, b \in \ell_1$, $c, d \in \ell_2$ либо прямая (ac) пересекает прямую (bd), либо (ad) пересекает (bc). Поскольку B переводит прямую в прямую, таким же свойством обладают точки $B(a), B(b), B(c), B(d)$. Отсюда следует, что прямые $B(\ell_1)$ и $B(\ell_2)$ лежат в одной плоскости. Поскольку B обратимо, они не пересекаются — следовательно, параллельны. Таким образом, B переводит параллельные прямые в параллельные.

Пусть $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, где $x, y, z, t \in L$. Равенство означает, что прямая xy параллельна прямой zt, а прямая xz — прямой yt. Следовательно, параллельны прямые $B(x)B(y)$ и $B(z)B(t)$, а также прямые $B(x)B(z)$ и $B(y)B(t)$. Поэтому $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$. □

Пример 1. Преобразование $\mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояние (движение), переводит прямую в прямую — следовательно, оно является аффинным преобразованием. То же относится к более широкому классу преобразований подобия, которые меняют все расстояния в одно и то же число раз.

Пусть теперь $\dim W = n+1$ (так что $V \subset W$ — гиперплоскость). Зафиксируем $a \in W$, $a \notin V$, и обозначим $L \stackrel{\text{def}}{=} a + V$.

Теорема 5. *Для всякого линейного оператора $A : W \to W$, сохраняющего множество L (т.е. такого, что $AL \subseteq L$) его ограничение $A|_L : L \to L$ является аффинным преобразованием. Всякое аффинное преобразоваие $B : L \to L$ может быть получено таким образом. Если $B = A|_L$ обратим, то A определен однозначно и также обратим.*

Доказательство. Аффинность $A|_L$: если $x, y, z, t \in L$ и $\overrightarrow{xy} = y - x = t - z = \overrightarrow{zt}$, то $\overrightarrow{A(x)A(y)} = A(y) - A(x) = A(y-x) = A(t-z) = A(t) - A(z) = \overrightarrow{A(z)A(t)}$.

Любое аффинное преобразование B пространства L можно продолжить до преобразования $A : W \to W$, сохраняющего L. А именно, для вектора $v \in V \subset W$ положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B}v \in V \subset W$. Для любого другого вектора v существует и единственно число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda v \in L$ (докажите! это вытекает из того, что $V \subset W$ имеет коразмерность 1 и $a \notin V$). В этом случае положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda}B(\lambda v)$. Очевидно, $AL \subset L$; докажем линейность. Если v таков, что $\lambda v \in L$, и $w = \nu v$, то $\lambda/\nu w \in L$. Отсюда $A(w) = \nu/\lambda B(\lambda/\nu w) = \nu/\lambda B(\lambda v) = \nu A(v)$ — однородность доказана (случай $v \in V$ разберите самостоятельно). Пусть теперь $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \in L$ и $v = v_1 + v_2$; предположим вначале, что $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Тогда $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 v_2 \in L$ — это точка, делящая отрезок $[\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2]$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$. Тогда $A(v) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}B(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 v_2)$ — точка, делящая в том же отношении отрезок $B([\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2]) = [B(\lambda_1 v_1), B(\lambda_2 v_2)]$ (поскольку B аффинно). То есть $A(v) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_1 v_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_2 v_2)) = A(v_1) + A(v_2)$. Доказательство того же равенства в случаях, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, а также когда $v_1 \in V$ и/или $v_2 \in V$ — упражнение.

Нетрудно видеть, что если B обратим, то оператор A, полученный предыдущей конструкцией, также обратим. Пусть теперь $B = A|_L = A_1|_L$. Тогда оператор $C \stackrel{\text{def}}{=} A_1 A^{-1}$ переводит каждую точку $x \in L$ в себя. Если $v \in V$, то существуют $x_1, x_2 \in L$ такие, что $v = x_1 - x_2$; отсюда $Cv = Cx_1 - Cx_2 = x_1 - x_2 = v$. Пусть теперь $e_1, \dots, e_n \in V$ — произвольный базис; тогда $e_1, \dots, e_n, e_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a$ — базис в W. Векторы базиса $e_1, \dots, e_{n+1}$ остаются неподвижными при преобразовании C — следовательно, $A_1 A^{-1} = C = I$, то есть $A = A_1$. Единственность A доказана. □

Следствие. *Если $V \subset W$ — гиперплоскость, то группа $\mathrm{Aff}(a+V)$ изоморфна нормализатору $a+V$, т.е. подгруппе в $\mathrm{GL}(W)$, состоящей из линейных преобразований, переводящих множество $a+V$ в себя.*

Назовем набор $a_0, \ldots, a_n$ из $(n+1)$ точек n-мерного аффинного пространства L *набором общего положения*, если точки не лежат ни в каком собственном аффинном подпространстве в L. Отсюда вытекает, что векторы $\overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_n} \in V$ не лежат ни в каком собственном векторном подпространстве, то есть образуют базис.

Теорема 6. *Для любых наборов $a_0, \ldots, a_n$ и $b_0, \ldots, b_n$ точек общего положения существует ровно одно обратимое аффинное преобразование $B : L \to L$ такое, что $B(a_i) = b_i$, $i = 0, \ldots, n$.*

Доказательство. Отождествим L и V с помощью взаимно однозначного отображения $S_{a_0} : L \to V$. Тогда, согласно теореме 2, требуется найти линейный оператор $A : V \to V$ и вектор $u \in V$ такие, что отображение $C(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Av + u$ переводит 0 в b_0, а каждый вектор $S_{a_0}(a_i) = \overrightarrow{a_0, a_i}$, $i = 1, \ldots, n$, в вектор $\overrightarrow{b_0, b_i}$. Из первого условия вытекает, что $u = b_0$, а остальные условия определяют A однозначно, поскольку векторы $S_{a_0}(a_i)$ образуют базис в V.

Поскольку точки $b_0, \ldots, b_n$ — общего положения, векторы $\overrightarrow{b_0, b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_0, b_n}$ образуют базис. Поскольку этот базис является образом базиса $\overrightarrow{a_0, a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0, a_n}$ под действием оператора A, оператор A обратим. Отсюда вытекает, что оператор C также обратим: $C^{-1}(w) = A^{-1}(w-u)$. $\square$

Пример 2. Пусть $abcd$ — трапеция на плоскости с основаниями ad и bc. Пусть o_1 и o_2 — середины оснований, $p = (ac) \cap (bd)$ и $q = (ab) \cap (cd)$. Докажем известную теорему "школьной" геометрии о том, что точки p, q, o_1, o_2 лежат на одной прямой.

Если трапеция $abcd$ — равнобокая, то прямая $o_1 o_2$ является ее осью симметрии. Симметрия меняет местами прямые ab и cd, а также прямые ac и bd. Поэтому точки p и q при симметрии переходят в себя — следовательно, они лежат на оси симметрии, и для равнобокой трапеции теорема доказана.

Если аффинное преобразование φ переводит трапецию $abcd$ в трапецию $a_1 b_1 c_1 d_1$, то o_1 и o_2 переходят, согласно пункту 2 теоремы 3, в середины отрезков $a_1 d_1$ и $b_1 c_1$, точка P переходит в $p_1 = (a_1 c_1) \cap (b_1 d_1)$, а q — в $(a_1 b_1) \cap (c_1 d_1)$. Поскольку φ переводит прямые в прямые, если теорема верна для $abcd$, то она верна и для $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Для произвольной трапеции $abcd$ рассмотрим аффинное преобразование φ, переводящее треугольник adq в равнобедренный — согласно теореме 6, такое преобразование существует. Поскольку φ переводит параллельные прямые в параллельные, трапеция $abcd$ при этом перейдет в равнобокую трапецию, для которой теорема доказана — следовательно, она верна и для $abcd$.