ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Аффинные пространства и аффинные преобразования II.

Пусть, как и в лекции 1, V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$, и пусть $V \subset W$ — гиперплоскость (так что W — векторное пространство над тем же полем размерности $n+1$) (так что $V \subset W$ — гиперплоскость). Зафиксируем $a \in W$, $a \notin V$, и обозначим $L \stackrel{\text{def}}{=} a + V$.

Множество L обладает естественной структурой аффинного пространства: $\overrightarrow{xy} \stackrel{\text{def}}{=} y - x \in V$; правило треугольника и аксиома откладывания очевидным образом выполнены.

Теорема 1. *Для всякого линейного оператора $A : W \to W$, сохраняющего множество L (т.е. такого, что $AL \subseteq L$) его ограничение $A|_L : L \to L$ является аффинным преобразованием. Всякое аффинное преобразоваие $B : L \to L$ равно $A|_L$ для ровно одного линейного оператора A, сохраняющего L. Если преобразование $B = A|_L$ обратимо, то оператор A также обратим.*

Доказательство. Полуаффинность $A|_L$: если $x, y, z, t \in L$ и $\overrightarrow{xy} = y - x = t - z = \overrightarrow{zt}$, то $\overrightarrow{A(x)A(y)} = A(y) - A(x) = A(y - x) = A(t - z) = A(t) - A(z) = \overrightarrow{A(z)A(t)}$. Аффинность: из того же вычисления вытекает, что $\widetilde{B} = A$ — по предположению, это линейный оператор.

Любое аффинное преобразование B пространства L можно продолжить до преобразования $A : W \to W$, сохраняющего L. А именно, для вектора $v \in V \subset W$ положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B}v \in V \subset W$. Для любого вектора $v \notin V$ существует и единственно число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda v \in L$ (докажите! это вытекает из того, что $V \subset W$ имеет коразмерность 1 и $a \notin V$). В этом случае положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda}B(\lambda v)$. Очевидно, $AL \subset L$; докажем линейность A, то есть его однородность и аддитивность.

Если вектор v таков, что $\lambda v \in L$ и $w = \nu v \neq 0$ (здесь $\lambda, \nu \in \mathbb{F}$), то $\lambda/\nu w \in L$. Отсюда $A(w) = \nu/\lambda B(\lambda/\nu w) = \nu/\lambda B(\lambda v) = \nu A(v)$ — однородность доказана (случай $v \in V$ разберите самостоятельно).

Для доказательства аддитивности предположим вначале, что $p, q \in L$, то есть $p = a + v$, $q = a + w$, где $v, w \in V$. Тогда линейная комбинация $xp + yq = (x + y)a + xv + yv \in L$ тогда и только тогда, когда $x + y = 1$. В этом случае по определению оператора $\widetilde{B} = A|_V$ имеем $B(xp + yq) = B(a) + \widetilde{B}(xv + yw) = (x + y)B(a) + xA(v) + yA(w) = xB(p) + yB(q)$ — это равенство обычно выражают словами “аффинные преобразования сохраняют аффинные комбинации точек”.

Пусть теперь $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \in L$ и $v = v_1 + v_2$; предположим, что $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Тогда $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 v_2 \in L$, поскольку $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = 1$. Как было доказано выше, в этом случае $B(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}v) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_1 v_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_2 v_2)$, откуда $A(v) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}B(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}v) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_1 v_1) + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}B(\lambda_2 v_2) = \frac{1}{\lambda_1}B(\lambda_1 v_1) + \frac{1}{\lambda_2}B(\lambda_2 v_2) = A(v_1) + A(v_2)$. Доказательство аддитивности в случаях, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, а также когда $v_1 \in V$ и/или $v_2 \in V$ — упражнение.

Единственность A: пусть $B = A_1|_L = A_2|_L$. Тогда $A_1|_V = \widetilde{B} = A_2|_V$ и, с другой стороны, $A_1(a) = A_2(a)$, поскольку $a \in L$. Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$ — произвольный базис, тогда $v_1, \dots, v_n, a$ — базис в W. Тем самым A_1 и A_2 совпадают на всех векторах из этого базиса и, следовательно, совпадают везде.

Пусть $B = A|_L : L \to L$ — обратимое аффинное преобразование, тогда $B^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} C|_L : L \to L$ тоже аффинно. Имеем $B \circ B^{-1} = \mathrm{id} = I|_L$, где $I : W \to W$ — единичный оператор. С другой стороны, $B \circ B^{-1} = AC|_L$, откуда в силу единственности $AC = I$. Аналогично $CA = I$, откуда вытекает, что A обратим. □

Следствие 1. *Группа $\mathrm{Aff}(L)$ изоморфна нормализатору L в группе $\mathrm{GL}(W)$, то есть подгруппе в $\mathrm{GL}(W)$, состоящей из линейных преобразований, переводящих множество L в себя.*

Пусть L — аффинное пространство, а $W \subset V$ — подпространство соответствующего векторного пространства V. Тогда для каждой точки $a \in L$ множество $S_a(W) = \{b \in L \mid \overrightarrow{ab} \in W\}$ называется аффинным подпространством, параллельным W и проходящим через точку a. Нульмерные аффинные подпространства это просто точки; одномерные называются аффинными прямыми. Аффинные подпространства $L_1, L_2 \subset L$ называются параллельными, если они либо не имеют общих точек, либо одно является подмножеством другого. Очевидно (проверьте!), что параллельность эквивалентна тому, что одно из векторных подпространств $W_1, W_w \subset V$ является подпространством другого.

Предложение 1. *Аффинные преобразования переводят аффинные подпространства в аффинные подпространства; обратимые аффинные преобразования при этом сохраняют размерность. Параллельные подпространства переходят в параллельные.*

Доказательство — упражнение.

Назовем набор $a_0, \dots, a_n \in L$ из $(n+1)$ точек n-мерного аффинного пространства L *набором общего положения*, если точки не лежат ни в каком собственном аффинном подпространстве в L. Отсюда вытекает, что векторы $\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n} \in V$ не лежат ни в каком собственном векторном подпространстве, то есть образуют базис.

Теорема 2. *Пусть L_1, L_2 — аффинные пространства размерностей n и m соответственно, и $a_0, \dots, a_n \in L_1$ — набор точек общего положения. Тогда для любого набора точек $b_0, \dots, b_n \in L_2$ существует ровно одно аффинное отображение $B : L_1 \to L_2$ такое, что $B(a_i) = b_i$, $i = 0, \dots, n$. Отображение B обратимо тогда и только тогда, когда $m = n$ и точки $b_0, \dots, b_n \in L_2$ — общего положения.*

Доказательство. Отождествим L_1 и V_1 с помощью взаимно однозначного отображения $S_{a_0} : V_1 \to L_1$. Тогда, согласно теореме о “координатной” форме аффинного преобразования, требуется найти линейное отображение $A : V_1 \to V_2$ и вектор $u \in V_2$ такие, что отображение $C(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Av + u$ переводит 0 в b_0, а каждый вектор $S_{a_0}(a_i) = \overrightarrow{a_0, a_i}$, $i = 1, \dots, n$, в вектор $\overrightarrow{b_0, b_i}$. Из первого условия вытекает, что $u = b_0$, а остальные условия определяют A однозначно, поскольку векторы $S_{a_0}(a_i)$ образуют базис в V_1.

Если $m = n$ и точки $b_0, \dots, b_n$ — общего положения, векторы $\overrightarrow{b_0, b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0, b_n}$ образуют базис. Поскольку этот базис является образом базиса $\overrightarrow{a_0, a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0, a_n}$ под действием ператора A, оператор A обратим. Отсюда вытекает, что оператор C также обратим: $C^{-1}(w) = A^{-1}(w - u)$. □

Пример 1. Пусть $abcd$ — трапеция на плоскости с основаниями ad и bc. Пусть o_1 и o_2 — середины оснований, $p = (ac) \cap (bd)$ и $q = (ab) \cap (cd)$. Докажем известную теорему “школьной” геометрии о том, что точки p, q, o_1, o_2 лежат на одной прямой.

Если трапеция $abcd$ — равнобокая, то прямая $o_1 o_2$ является ее осью симметрии. Симметрия меняет местами прямые ab и cd, а также прямые ac и bd. Поэтому точки p и q при симметрии переходят в себя — следовательно, они лежат на оси симметрии, и для равнобокой трапеции теорема доказана.

Если аффинное преобразование φ переводит трапецию $abcd$ в трапецию $a_1 b_1 c_1 d_1$, то, поскольку оно сохраняет аффинные комбинации точек, точки o_1 и o_2 переходят в середины отрезков $a_1 d_1$ и $b_1 c_1$, точка P переходит в $p_1 = (a_1 c_1) \cap (b_1 d_1)$, а q — в $(a_1 b_1) \cap (c_1 d_1)$. Преобразование φ переводит прямые в прямые, так что если теорема верна для $abcd$, то она верна и для $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Для произвольной трапеции $abcd$ рассмотрим аффинное преобразование φ, переводящее треугольник adq в равнобедренный — согласно теореме 2, такое преобразование существует. Поскольку φ переводит параллельные прямые в параллельные, трапеция $abcd$ при этом перейдет в равнобокую трапецию, для которой теорема доказана — следовательно, она верна и для $abcd$.