ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Выпуклые множества. Теорема Каратеодори, теорема Хелли.

Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых точек $a, b \in X$ отрезок $[a, b] \subset X$.

Пример 1. Если $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция, $c \in \mathbb{R}$, то множества $\Pi_c^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) > c\}$, $\Pi_c^{+0} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) \geq c\}$ и $\Pi_c^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) = c\}$ выпуклы. Действительно, пусть $\ell(a), \ell(b) > c$ (соответственно, $\geq c$ или $= c$). Точка $x \in [a, b]$ всегда имеет вид $x = ta + (1-t)b$ для некоторого $0 \leq t \leq 1$. Тогда $\ell(x) = t\ell(a) + (1-t)\ell(b) > c$ (соответственно, $\geq c$ или $= c$).

Пример 2. Шар $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - c| \leq r\}$ — выпуклое множество. Доказательство — упражнение.

Теорема 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для любых точек $a_1, \dots, a_m \in X$ и любых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ таких, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, точка $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \in X$.*

Доказательство. Индукция по m; база $m = 1$ очевидна. Отрезок с концами $p, q \in \mathbb{R}^n$ это множество $\{tp + (1-t)q \mid 0 \leq t \leq p\}$, поэтому утверждение теоремы при $m = 2$ равносильно определению выпуклости. Пусть для некоторого m теорема доказана, и имеются точки $a_1, \dots, a_{m+1} \in X$. Если $\lambda_{m+1} = 0$, то утверждение теоремы верно по предположению индукции; если $\lambda_{m+1} = 1$, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, и утверждение вытекает из условия теоремы.

Пусть теперь $0 < \lambda_{m+1} < 1$ и $\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$ и $\mu_1 + \dots + \mu_m = 1$, откуда по предположению индукции $b \in X$, где $b = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m$. Точка $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1})b + \lambda_{m+1} a_{m+1}$ принадлежит отрезку $[b, a_{m+1}]$ и, следовательно, принадлежит X. □

Точка $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ называется выпуклой комбинацией точек $a_1, \dots, a_m$ (с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$).

Очевидные утверждения про выпуклость. *1) Пересечение любого набора выпуклых множеств либо пусто, либо выпукло.*

2) Образ выпуклого множества при аффинном отображении — выпуклое множество.

Первое утверждение тривиально вытекает из определения, а второе — из того, что аффинное отображение переводит отрезки в отрезки, причем концы — в концы.

Определение. Выпуклой оболочкой $\mathrm{co}(Y)$ множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств $X \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $Y \subset X$.

Замечание 1. Из первого утверждения вытекает, что выпуклая оболочка произвольного множества выпукла. Очевидно, $\mathrm{co}(Y)$ — наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее Y: если $Y \subset X$ и X выпукло, то $\mathrm{co}(Y) \subset X$.

Теорема 2. $\mathrm{co}(Y)$ *это множество выпуклых комбинаций всех конечных наборов точек $a_1, \dots, a_m \in Y$.*

Доказательство. Множество $\mathrm{co}(Y)$ выпукло, так что согласно теореме 1 если $a_1, \dots, a_m \in Y$, то любая выпуклая комбинация этих точек принадлежит $\mathrm{co}(Y)$. Тем самым $\tilde{Y} \subset \mathrm{co}(Y)$, где $\tilde{Y}$ обозначено множество выпуклых комбинаций. С другой стороны, $\tilde{Y}$ выпукло (докажите!) и содержит множество Y, откуда в силу замечания 1 получаем обратное включение: $\mathrm{co}(Y) \subset \tilde{Y}$. □

Оказывается, количество точек в выпуклой комбинации можно ограничить:

Теорема 3 (Каратеодори). *Всякая точка $x \in \mathrm{co}(Y)$, где $Y \subset \mathbb{R}^n$, является выпуклой комбинацией не более чем $n + 1$ точек $a_1, \dots, a_{n+1} \in Y$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{co}(Y)$; согласно теореме 2, $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$. Если $k \leq n + 1$, то теорема доказана; пусть $k \geq n + 2$. Тогда $k - 1 \geq n + 1$ векторов $a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1 \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\mu_2, \dots, \mu_k$, не все равные нулю, для которых $\mu_2(a_2 - a_1) + \dots + \mu_k(a_k - a_1) = 0$. Полагая $\mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\mu_2 - \dots - \mu_k$, получим $\mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k = 0$ и $\mu_1 + \dots + \mu_k = 0$. Из последнего равенства следует, что среди $\mu_1, \dots, \mu_k$ есть положительные; пусть $t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\frac{\lambda_j}{\mu_j} \mid j : \mu_j > 0\}$. Тогда все числа $\lambda'_j \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j - t\mu_j \geq 0$, а $\lambda'_i = 0$. С другой стороны, $x = (\lambda_1 - t\mu_1)a_1 + \dots + \widehat{(\lambda_i - t\mu_i)a_i} + \dots + (\lambda_k - t\mu_k)a_k$, причем $(\lambda_1 - t\mu_1) + \dots + (\lambda_k - t\mu_k) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) - t(\mu_1 + \dots + \mu_k) = 1$ — таким образом, x это выпуклая комбинация $(k-1)$ точек. Тем самым количество точек в выпуклой комбинации можно уменьшать, пока оно не станет $k \leq n + 1$. □

Теорема 4 (Радона)**.** *Любые $n+2$ точки $a_1, \dots, a_{n+2} \in \mathbb{R}^n$ можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Пример 3. Среди трех точек на прямой одна лежит между двумя другими и, следовательно, является их выпуклой комбинацей.

Пример 4. Если три из 4 точек на плоскости лежат на одной прямой, то одна из них является, согласно примеру 3, выпуклой комбинацией двух других, что доказывает в этом случае теорему (четвертую точку можно присоединить к любому из подмножеств). Если таких трех точек нет, то 4 точки являются вершинами либо выпуклого четырехугльника, либо невыпуклого. В первом случае каждое из двух подмножеств содержит по 2 точки — концы диагоналей; диагонали (выпуклые оболочки пар своих концов) пересекаются. Во втором случае одна из точек — вершина угла, большего развернутого — составляет одно подмножество и лежит внутри треугольника, образованного тремя оставшимися точками, которые образуют второе подмножество.

Доказательство теоремы Радона. Векторы $a_1 - a_{n+2}, \dots, a_{n+1} - a_{n+2} \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы: существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (a_i - a_{n+2}) = 0$. Полагая $\lambda_{n+2} \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, получим $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i a_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0$. Поскольку не все λ_i равны нулю, множества $I_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid \lambda_i > 0\}$ и $I_- \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid \lambda_i < 0\}$ непусты. Положим $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I_+} \lambda_i > 0$, тогда $\sum_{i \in I_-} \lambda_i = -\Lambda$. Тогда точка $a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I_+} \frac{\lambda_i}{\Lambda} a_i = -\sum_{i \in I_-} \frac{\lambda_i}{\Lambda} a_i$ принадлежит выпуклой оболочке множества $\{a_i \mid i \in I_+\}$ и выпуклой оболочке множества $\{a_i \mid i \in I_-\}$. □

Следствие 1 (теорема Хелли)**.** *Если $X_1, \dots, X_N \subset \mathbb{R}^n$ — конечный набор выпуклых множеств, такой, что каждые $n+1$ из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.*

Доказательство. Индукция по $N \geq n+2$; база $N = n+2$. Пусть x_i — общая точка всех $X_1, \dots, X_{n+2}$, кроме, возможно, X_i. Согласно теореме Радона, существует разбиение $\{1, \dots, n+2\} = I_+ \sqcup I_-$ и точка $x \in \operatorname{co}(\{x_i \mid i \in I_+\}) \cap \operatorname{co}(\{x_i \mid i \in I_-\})$. Докажем, что $x \in \bigcap_{j=1}^{n+2} X_j$. Пусть $j \in \{1, \dots, n+2\}$; без ограничения общности $j \in I_+$. Точки $x_i, i \neq j$, все принадлежат X_j; отсюда вытекает, что все точки $x_i, i \in I_-$, принадлежат X_j. Следовательно, $\operatorname{co}(\{x_i \mid i \in I_-\}) \in X_j$ и, следовательно, $x \in X_j$. Поскольку j произвольно, $x \in \bigcap_{j=1}^{n+2} X_j$, и тем самым пересечение непусто.

Пусть теперь $N \geq n+3$ произвольно, и для $N-1$ множеств теорема доказана. Согласно базе индукции, пересечение любых $n+2$ множеств из X_i непусто. Положим $X'_i \stackrel{\text{def}}{=} X_i$ при $i = 1, \dots, N-2$ и $X'_{N-2} \stackrel{\text{def}}{=} X_{N-1} \cap X_N$. Тогда в наборе множеств $X'_1, \dots, X'_{N-1}$ любые $(n+1)$ множеств имеют непустое пересечение, и по предположению индукции, все имеют общую точку, которая является общей точкой также и всех $X_1, \dots, X_N$. □