ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Теорема об отделимости. Теорема Крейна–Мильмана. Выпуклые многогранники.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$; рассмотрим расстояние от начала координат до точек отрезка $[a, b] \in \mathbb{R}^n$ (нам это несколько раз понадобится в дальнейшем). А именно, $\varrho^2(0, ta+(1-t)b) = (ta+(1-t)b, ta+(1-t)b)$ (скобки означают скалярное произведение) $= t^2((a,a)+(b,b)-2(a,b))+2t(-(b,b)+(a,b))+(b,b) = t^2\,|a-b|^2+2t(a,a-b)n+|b|^2$. Эта функция — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом; тем самым у нее есть на всей действительной прямой точка минимума $t_* = \frac{(b-a,b)}{|a-b|^2}$.

По отношению к отрезку $[0, 1]$ точка t_* может быть расположена тремя способами:

1) $t_* \in [0, 1]$, то есть $(b - a, b) \geq 0$ и $(b - a, b) \leq |a - b|^2 = (b - a, b - a) \Leftrightarrow (b - a, a) \leq 0$. В этом случае t_* является точкой минимума функции и на отрезке $[0, 1]$. Если t_* лежит внутри отрезка, то минимальное значение функции строго меньше, чем ее значение на каждом из концов, т.е. меньше, чем $|a|^2$ и $|b|^2$.
2) $t_* < 0$, то есть $(b-a, b) < 0$ (откуда вытекает $(b-a, a) = (b-a, a-b)+(b-a, b) = -|b-a|^2+(b-a, b) < 0$, а также $|b|^2-(a, b) < 0$ и $(a, b)-|a|^2 < 0$, откуда $|b| < |a|$). В этом случае функция достигает минимума на отрезке при $t = 0$ и минимум равен $|b|^2$.
3) $t_* > 1$ — в этом случае аналогично: $(b - a, a) > (b - a, b) > 0$, $|b| > |a|$; минимум достигается в точке $t = 1$ и равен $|a|^2$.

Поскольку параллельный перенос сохраняет расстояния, начало координат в этих рассуждениях можно заменить любой другой точкой $u \in \mathbb{R}^n$; в этом случае a и b нужно заменить на $a + u$ и $b + u$ соответственно.

Теорема 1 (об отделяющей гиперплоскости)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, а $a \notin X$. Тогда существует линейный функционал $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что $\ell(a) > c$, но $\ell(x) \leq c$ при всех $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим $r \geq 0$ такое, что $B_r(a) \cap X \neq \varnothing$, где $B_r(a) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r\}$ — замкнутый шар. Поскольку $B_r(a)$ — компакт, а X замкнуто, пересечение — компакт. Функция $x \mapsto |x - a|$ непрерывна, откуда вытекает, что существует точка $x_* \in X \cap B_r(a)$, на которой эта функция достигает своего минимума. Очевидно (докажите!), что точка x_* — ближайшая к a на всем множестве X.

Положим теперь $\ell(v) \overset{\text{def}}{=} (x_* - a, v)$ (скобки означают скалярное произведение), а $c = (x_* - a, a)$. Тогда $\ell(a) = c$, а $r \overset{\text{def}}{=} \ell(x_*) < c$, поскольку $(x_* - a, x_* - a) = |x_* - a|^2 > 0$.

Для удобства записи сделаем параллельный перенос так, чтобы точка a стала началом координат. Пусть существует точка $y \in X$ такая, что $\ell(y) < \ell(x_*)$, т.е. $(x_*, x_* - y) \geq 0$, то есть $(x_*, y) \leq |x_*|^2$. Отрезок $[y, x_*]$ целиком лежит в множестве X в силу выпуклости. Поскольку x_* — ближайшая к $a = 0$ точка множества X, имеем $|y| \geq |x_*|$, откуда вытекает, что $(x_*, y) \leq |y|^2$, то есть $(x_* - y, y) \leq 0$. Тем самым отрезок $[x_*, y]$ расположен, как в случае 1 выше, так что ближайшая к началу координат точка отрезка лежит внутри него и ближе (к началу координат), чем любой из его концов, в том числе x_*. Но это точка множества X, что противоречит тому, что $x_* \in X$ — ближайшая к началу координат. □

Множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) = c\}$ в обозначениях теоремы 1 называется отделяющей гиперплоскостью.

Точка $a \in X$ (где $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло) называется крайней, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком лежащего в X.

Лемма 1. *Всякий выпуклый компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет крайние точки.*

Доказательство. Индукция по n; база $n = 1$. Компакт $X \subset \mathbb{R}$ ограничен и замкнут, так что содержит наибольшую точку: $a = \max(X)$. Очевидно, a крайняя. Кстати, другая крайняя точка — наименьшая, $b = \min(X)$, откуда сразу вытекает, что X — отрезок $[a, b]$.

Для произвольного n рассмотрим ненулевую линейную функцию $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Она достигает на X своего максимума: $u = \max_{x\in X} \ell(x)$. Множество $X_0 \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \ell(x) = u\} = X \cap L$, где $L \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \ell(y) = u\}$ — гиперплоскость, является пересечение двух выпуклых (X и L), так что оно выпукло. Поскольку $\dim L = n-1$, множество X_0 имеет, по предположению индукции, крайнюю точку m. Пусть m — внутренняя точка отрезка $[p, q] \subset X$: $m = t_*p + (1 - t_*)q$, где $0 < t_* < 1$. Функция $\mu(t) \overset{\text{def}}{=} \ell(tp + (1 - t)q)$ линейная (неоднородная) и достигает во внутренней точке t_* своего максимума на отрезке $[0, 1]$. Это возможно только если функция — константа; отсюда $p, q \in X_0$. Но это противоречит тому, что m — крайняя точка X_0. Следовательно, отрезок $[p, q]$ не существует, и m — крайняя точка всего X. □

Теорема 2 (Крейна–Мильмана). *Всякий выпуклый компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ является замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.*

Доказательство. Пусть X — выпуклый компакт, а $K \subset X$ — множество его крайних точек. Поскольку X выпукло, имеем $\mathrm{co}(K) \subset X$, а поскольку X замкнуто, то также и $\overline{\mathrm{co}(K)} \subset X$.

Лемма 2. *Замыкание выпуклого множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ выпукло.*

Доказательство леммы. Пусть $p.q \in \overline{Y}$ и $x \in [p,q]$, т.е. $x = tp + (1-t)q$ для некоторого $t \in [0,1]$. Тогда существуют последовательности точек $p_n, q_n \in Y$, сходящиеся к p и q соответственно. Поскольку Y выпукло, точки $x_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} tp_n + (1-t)q_n \in Y$; очевидно, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что $x \in \overline{Y}$, и лемма доказана. □

Из леммы вытекает, что множество $\overline{\mathrm{co}(K)}$ выпукло. С другой стороны, оно замкнуто и лежит в компакте X — следовательно, само является компактом.

Пусть теперь теорема неверна: существует $a \in X$ такое, что $a \notin \overline{\mathrm{co}(K)}$. Рассмотрим линейную функцию ℓ из теоремы 1, отделяющую a от выпуклого компакта $\overline{\mathrm{co}(K)}$: $\ell(a) = c$, но $\ell(x) < c$ для всех $x \in \overline{\mathrm{co}(K)}$. Поскольку X — компакт, функция ℓ достигает на нем своего максимума $u = \max_{x\in X} \ell(x)$. Множество $X_0 = \{x \in X \mid \ell(x) = u\}$ — выпуклый компакт; по лемме 1 оно имеет крайнюю точку m. Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается, что m — крайняя точка всего множества X; с другой стороны, $\ell(m) = u \geq c > \ell(x)$ при всех $x \in K \subset \overline{\mathrm{co}(K)}$ — следовательно, $m \notin K$. Противоречие. □

Следствие 1. *Если линейный функционал ℓ не превосходит некоторого значения c во всех крайних точках выпуклого множества X, то $\ell(x) \leq c$ для всех точек $x \in X$.*

Выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного числа точек: $P = \mathrm{co}(\{a_1, \dots, a_N\})$.

Теорема 3. *Выпуклый многогранник компактен. Подмножество $X \in \mathbb{R}^n$ является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда оно компактно и является пересечением конечного числа замкнутых полупространств — иными словами, задается конечной системой нестрогих линейных неравенств.*

Доказательство. Пусть $X = \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — выпуклый многогранник. Обозначим $\Delta_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1\}$ (Δ_n называется стандартным n-мерным симплексом). Как нетрудно видеть, Δ_n — выпуклый компакт.

Зафиксируем набор индексов $I = \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, \dots, N\}$ и определим отображение $f_I : \Delta_n \to X$ формулой $f_I(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \lambda_1 a_{i_1} + \dots + \lambda_{n+1} a_{i_{n+1}}$. Образ $f_I(\Delta_n)$ — компакт; согласно теореме Каратеодори, $X = \bigcup_I f_I(\Delta_n)$ — конечное объединение компактов, т.е. тоже компакт.

Рассмотрим теперь множество линейных функций $X^\vee \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\ell \in (\mathbb{R}^n)^* \mid -1 \leq \ell(x) \leq 1 \,\forall x \in X\}$. Очевидно (докажите!), что $X^\vee$ — выпуклый компакт; пусть $K \subset X^\vee$ — множество его крайних точек. Для произвольной линейной функции $\ell \in K$ обозначим $A_\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{i \mid \ell(a_i) = -1\}$ и $B_\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{i \mid \ell(a_i) = 1\}$; если $i \notin A_\ell \cup B_\ell$, то $-1 < \ell(a_i) < 1$. Поэтому если $\ell_1, \ell_2 \in K$, $\ell_1 \neq \ell_2$ и $A_{\ell_1} = A_{\ell_2}$, $B_{\ell_1} = B_{\ell_2}$, то, очевидно, $t\ell_1 + (1-t)\ell_2 \in X^\vee$ при $-\varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Это противоречит тому, что ℓ_1, ℓ_2 — крайние точки. Следовательно, точка $\ell \in K$ полностью определяется своими множествами A_ℓ и B_ℓ, откуда вытекает, что K конечно. Согласно следствию 1, $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq \ell(x) \leq 1 \,\forall \ell \in K\}$, то есть является пересечением конечного числа полупространств.

Обратно, пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_1(x) \leq c_1, \dots, \ell_N(x) \leq c_N\}$ для некоторого конечного набора линейных функций $\ell_1, \dots, \ell_N \in (\mathbb{R}^n)^*$ и констант $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$. Очевидно, X замкнуто (пересечение замкнутых полупространств); пусть X также и ограничено (или, что то же самое, компактно). Обозначим $Q \subset X$ совокупность крайних точек X. Для произвольной точки $u \in Q$ рассмотрим множество $C_u = \{i \mid \ell_i(x) = c_i\}$. Аналогично первой части доказателсьтва легко убедиться, что если $C_{u_1} = C_{u_2}$, то $u_1 = u_2$, откуда вытекает, что Q конечно. В этом случае $\mathrm{co}(Q) \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто (докажите!) и, следовательно, по теореме Крейна–Мильмана, $X = \overline{\mathrm{co}(Q)} = \mathrm{co}(Q)$ — выпуклый многогранник. □