ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Проективные пространства, проективная группа.

Проективизацией векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$ (обозначается $\mathbb{P}V$) называется множество одномерных подпространств $\ell \subset V$, то есть множество прямых в V, проходящих через начало координат. Проективизация векторного пространства размерности $n+1$ называется n-мерным проективным пространством над полем $\mathbb{F}$ (обозначается $\mathbb{F}P^n$). Если $W \subset V$ — векторное подпространство, то подмножество $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$ называется проективным подпространством пространства $\mathbb{P}V$.

Прямая $\ell \subset V$, проходящая через 0, однозначно задается любым своим вектором $v \in \ell$, $v \neq 0$. Если $v_1, v_2 \in \ell$, $v_1 \neq 0 \neq v_2$, то $v_2 = tv_1$, где $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Тем самым $\mathbb{P}V$ можно представить как фактор-множество $V \setminus \{0\}$ по отношению эквивалентности $v \sim tv$, $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Пусть $\dim V = n$ и $e_1, \dots, e_n \in V$ — базис. Любой вектор однозначно представим в виде $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$; неравенство $v \neq 0$ означает, что $x_i \neq 0$ по крайней мере для некоторых i. Тем самым получается, что $\mathbb{F}P^n$ это фактор $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}, (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\}/(x_1, \dots, x_n) \sim (tx_1, \dots, tx_n)\, \forall t \neq 0$. Обычно пишут $\mathbb{F}P^n = \{[x_1 : \dots : x_n]\}$, числа $[x_1 : \dots : x_n]$ (не равные одновременно нулю и определенные с точностью до умножения на общий множитель) называют однородными координатами точек проективного пространства.

Пусть $W \subset V$ — подпространство коразмерности 1 и пусть $L \subset V$ — аффинное подпространство, параллельное W и не проходящее через 0. Если $\ell \in \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$, то прямая $\ell \subset V$ пересекают L в единственной точке $a = \ell \cap L$. С другой стороны, для каждой точки $a \in L$ прямая $(0a)$, проходящая через a и начало координат, единственна и принадлежит $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$. Тем самым $\Phi_L(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \ell \cap L$ — взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ и L, которое, в частности, наделяет $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ структурой аффинного пространства. Тем самым $\mathbb{P}V = L \cup \mathbb{P}W$; в частности $\mathbb{F}P^n = L \cup \mathbb{F}P^{n-1}$, где L — аффинное пространство размерности $(n-1)$ над $\mathbb{F}$. Точки проективной гиперплоскости $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$ называются бесконечно удаленными точками аффинного пространства L. Подчеркнем (очевидную) вещь: подразделение точек проективного пространства на "обычные" (точки $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W \cong L$) и бесконечно удаленные зависит от выбора гиперплоскости $W \subset V$ и не отражает никакой внутренней структуры.

Взаимно однозначное соответствие $\Phi_L : \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W \to L$ согласовано с переходом к подпространству. Действительно, пусть $U \subset V$ — векторное подпространство, причем $U \not\subset W$. Тогда пересечение $U \cap W \subset U$ имеет в U коразмерность 1 (докажите!), а $\mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$ — проективное подпространство. Если $\ell \in \mathbb{P}U \setminus \mathbb{P}W$, то $\ell \cap L$ — точка, лежащая в пересечении $U \cap L$, которое является аффинным подпространством, параллельным векторному пространству $U \cap W$. Иными словами, ограничение $\Phi_L|_{\mathbb{P}U \setminus \mathbb{P}W}$ совпадает с отображением $\Phi_{U \cap L} : \mathbb{P}U \setminus \mathbb{P}W \to U \cap L$. Точки пересечения $U \cap W$ — бесконечно удаленные точки аффинного подпространства $U \cap L$.

Отображение $A : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ называется проективным преобразованием, если существует обратимый линейный оператор $B : V \to V$ такой, что если $A(\ell_1) = \ell_2$ и $v \in \ell_1$, то $Bv \in \ell_2$; в этом случае пишут $A = \mathbb{P}B$.

Теорема 1. *Если $A = \mathbb{P}B$, то оператор B определен однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу. Имеем $\mathbb{P}(B_1 B_2) = \mathbb{P}B_1 \mathbb{P}B_2$. Проективное преобразование $\mathbb{P}B$ обратимо, причем $(\mathbb{P}B)^{-1} = \mathbb{P}(B^{-1})$.*

Доказательство. Пусть $A = \mathbb{P}B_1 = \mathbb{P}B_2$. Тогда линейный оператор $C \stackrel{\text{def}}{=} B_1 B_2^{-1}$ переводит каждую прямую $\ell \subset V$ в себя, то есть каждый вектор v — в пропорциональный: $Cv = \lambda(v) v$, где $\lambda(v) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ при $v \neq 0$. Если $\dim V = 1$, то это заканчивает доказательство. Если $\dim V > 1$, то пусть $v_1, v_2 \in V$ — линейно независимые (не пропорциональные друг другу) векторы; тогда $Cv_1 = \lambda_1 v_1$, $Cv_2 = \lambda_2 v_2$. Как мы знаем, существует λ такое, что $C(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$; с другой стороны, $C(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, откуда $(\lambda - \lambda_1) v_1 + (\lambda - \lambda_2) v_2 = 0$. Поскольку v_1 и v_2 линейно независимы, получаем $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$. Тем самым $C = B_1 B_2^{-1}$ умножает каждый вектор v на одну и ту же константу λ, т.е. $B_1 = \lambda B_2$.

Оставшиеся утверждения теоремы очевидны. □

Следствие 1. *Проективные преобразования пространства $\mathbb{P}V$ образуют группу, $\mathrm{PGL}(V)$ изоморфную фактор-группе группы $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований V по подгруппе $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \subset \mathrm{GL}(V)$ (где I — тождественный оператор).*

Пример 1. Пусть $n = 1$; тогда проективная прямая $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}^2) = \{[x : y]\}$. Рассмотрим прямую $W \overset{\text{def}}{=} \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{F}\}$ и параллельную ей аффинную прямую $L \overset{\text{def}}{=} \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{F}\}$. Как обычно, выбор начальной точки $a_0 = (0, 1) \in L$ задает взаимно однозначное отображение $S_{a_0} : W \to L$, для которого $S_{a_0}(x) = (x, 1)$.

Множество $\mathbb{P}W$ состоит из единственной точки $[1 : 0]$. Если $y \neq 0$, то прямая $\ell = [x : y] = \{(tx, ty) \mid t \in \mathbb{F}\}$ пересекает L в точке $a = (x/y, 1)$. Тем самым, определено взаимно однозначное соответствие $\varrho : \mathbb{F}P^1 \setminus \{[1 : 0]\} \to \mathbb{F}$, сопоставляющее произвольной точке $\ell = [x : y] \in \mathbb{F}P^1 \setminus \{[1 : 0]\}$ число (элемент поля $\mathbb{F}$) $S_{a_0}^{-1}(\ell \cap L) \in \mathbb{F}$ — “координату” точки $[x : y]$; в явном виде $\varrho([x : y]) = x/y$, обратное отображение, очевидно, $\varrho^{-1}(t) = [t : 1]$. Точка $[1 : 0]$ — бесконечно удаленная; условно пишут $\varrho([1 : 0]) = \infty$.

Группа $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^2)$ состоит из матриц $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $\det B = ad - bc \neq 0$. Пусть $\ell = \varrho^{-1}(t) = [t : 1]$ и $v = (t, 1) \in \ell$. Тогда $Bv = (at + b, ct + d) \in \ell'$, где $\ell' = [at + b : ct + d]$. Тем самым $\mathbb{P}B([t : 1]) = [at + b : ct + d]$, а если $\tilde{B} \overset{\text{def}}{=} \varrho \circ \mathbb{P}B \circ \varrho^{-1}$, то $\tilde{B}(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, т.е. $\tilde{B}$ — дробно-линейная функция (или линейная, если $c = 0$). Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $\frac{at+b}{ct+d} \neq const$. Как легко проверить, $\tilde{B}(\infty) = a/c$ и $\tilde{B}(-d/c) = \infty$, что при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ согласуется с понятием (бесконечного) предела. Тем самым $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ это группа дробно-линейных преобразований с операцией композиции.