ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Проективная группа II. Проективная двойственность.

Теорема 1. *Если линейное преобразование $B \in \mathrm{GL}(V)$ переводит гиперплоскость $W \subset V$ в себя, то проективное преобразование $\mathbb{P}B$ переводит в себя аффинное пространство $L = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$, причем ограничение $B|_L : L \to L$ — обратимое аффинное преобразование. Всякое обратимое аффинное преобразование $P : L \to L$ может быть получено таким образом, причем ровно из одного проективного преобразования, переводящего W в себя.*

Доказательство. Пусть $L \subset V$ — аффинная гиперплоскость, параллельная W, но не совпадающая с ней — иными словами, $L = e + W$, где $e \notin W$. Поскольку $B(W) = W$, имеем $B(L) = B(e + W) = B(e) + W$ — это аффинная гиперплоскость, параллельная L (почему?). Поскольку коразмерность W равна 1, векторы e и $B(e)$ линейно зависимы в (одномерном) фактор-пространстве V/W. А поскольку $e \notin W$ (т.е. $e \neq 0$ в V/W), существует $c \in \mathbb{F}$ такое, что $B(e) = ce$ в V/W — иными словами, $B(e) - ce \in W$; поскольку также и $B(e) \notin W$, имеем $c \neq 0$. Отсюда вытекает (как именно?), что линейный оператор $B_1 = B/c$ переводит в L в себя. С другой стороны, $\mathbb{P}B_1 = \mathbb{P}B = A$. Тем самым, если проективное преобразование $A = \mathbb{P}B$ переводит W в себя, можно без ограничения общности считать, что B переводит L в себя.

Теперь требуемое утверждение вытекает из теоремы 1 лекции 2. □

Следствие 1. *Нормализатор $\mathrm{Norm}_{\mathrm{PGL}(\mathbb{P}V)}(\mathbb{P}W)$ гиперплоскости $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$ в проективном пространстве изоморфен аффинной группе аффинного пространства, параллельного W.*

Назовем $a_1, \dots, a_{n+2} \in \mathbb{F}P^n$ набором точек общего положения, если никакие $n+1$ из них не лежат в собственном проективном подпространстве $H \subset \mathbb{F}P^n$. Это утверждение, очевидно, эквивалентно тому, что если $x_i \in a_i$, $i = 1, \dots, n+2$ — ненулевые векторы в соответствующих прямых, то любые $(n+1)$ из них образуют базис в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{F}^{n+1}$, проективизацией которого является $\mathbb{F}P^n$.

Пример 1. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}P^1$ — набор общего положения, если точки попарно различны (точка это проективное подпространство $\mathbb{F}P^0$). $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}P^2$ — набор общего положения, если никакие три точки не лежат на одной прямой.

Теорема 2. *Для любых двух наборов $a_1, \dots, a_{n+2}$ и $b_1, \dots, b_{n+2}$ точек общего положения существует ровно одно проективное преобразование $A \in \mathrm{PGL}(n)$, переводящее $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \dots, n+2$.*

Доказательство. Выберем ненулевые векторы $u_i \in a_i$, $v_i \in b_i$, $i = 1, \dots, n+2$. Поскольку точки $a_1, \dots, a_{n+1}$ не лежат в собственном проективном подпространстве, векторы $u_1, \dots, u_{n+1}$ образуют базис в $\mathbb{F}^{n+1}$. Поэтому найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}$ такие, что $u_{n+2} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Если $\lambda_k = 0$ для какого-либо k, то $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+2}$ лежат в подпространстве $H \subset \mathbb{F}^{n+1}$, состоящем из всех линейных комбинаций n векторов $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+1}$. Линейные комбинации $n < n+1$ векторов не могут породить $\mathbb{F}^{n+1}$, поэтому $H \neq \mathbb{F}^{n+1}$, что противоречит условию общего положения для точек $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n+2}$. Следовательно, среди $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ нет нулей. Аналогично, найдутся $\mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ такие, что $v_{n+2} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n+1} v_{n+1}$.

Определим линейный оператор $B : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^{n+1}$ равенствами $Xu_i = \mu_i/\lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Поскольку $u_1, \dots, u_{n+1}$ — базис, эти условия определяют B однозначно. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, оператор B обратим. Очевидно, $\mathbb{P}B(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+1$. Теперь $Bu_{n+2} = \sum_i \lambda_i B u_i = \sum_i \mu_i v_i = v_{n+2}$. Отсюда вытекает, что $\mathbb{P}B(a_{n+2}) = b_{n+2}$.

С другой стороны, если $\mathbb{P}C(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+2$, то $Cu_i = y_i v_i$ для всех i. Условие $Cu_{n+2} = y_{n+2} v_{n+2}$ означает, что $\sum_{i=1}^{n+1} y_i \lambda_i v_i = y_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i$. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, получаем $y_i = \mu_i/\lambda_i y_{n+2}$, откуда следует, что $\mathbb{P}C = \mathbb{P}B$. □

Вот пример применения теоремы 2:

Теорема (Дезарга). *Пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Утверждение теоремы Дезарга является проективно инвариантным — если оно верно для какой-либо конфигурации, то верно и для всех конфигураций, получающихся из данной проективным преобразованием. В силу теоремы 2 можно проективным преобразованием отправить две произвольных точки на бесконечно удаленную прямую. Сделаем это с точками $ab \cap a'b'$ и $bc \cap b'c'$. Тогда получится такое (очевидное) утверждение: пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в точке o, прямая ab параллельна прямой $a'b'$, прямая bc параллельна прямой $b'c'$. Тогда прямая ac параллельна прямой $a'c'$. □

Множество линейных функций на векторном пространстве V образует векторное пространство над тем же полем $\mathbb{F}$, что и V: $(\ell_1 + \ell_2)(v) = \ell_1(v) + \ell_2(v)$, $(\alpha\ell)(v) = \alpha\ell(v)$; здесь $v \in V$, $\ell, \ell_1, \ell_2 : V \to \mathbb{F}$ — линейные функции, и $\alpha \in \mathbb{F}$. Это пространство обозначается V^* и называется двойственным к V.

Рассмотрим отображение $\varphi : V \to (V^*)^*$, где всякому вектору $v \in V$ соответствует линейная функция $\varphi(v) : V^* \to \mathbb{F}$, действующая по формуле $\varphi(v)(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \ell(v)$; здесь $\ell \in V^*$, то есть $\ell : V \to \mathbb{F}$ — линейная функция.

Теорема 3. *1) Отображение φ является мономорфизмом векторных пространств.*
2) Если V конечномерно, то пространство V^* изоморфно V, а φ является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем, что φ — мономорфизм. Действительно, утверждение $v \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ означает, что $\varphi(v)(\ell) = 0$ для любого $\ell \in V^*$ — иными словами, $\ell(v) = 0$ для всякой линейной функции $\ell : V \to \mathbb{F}$. Если $v \neq 0$, то всегда (даже в бесконечномерном V) можно достроить v до базиса, т.е. найти такой базис $e_\alpha \in V$, что $e_0 = v$. Но тогда имеется линейная функция ℓ такая, что $\ell(e_0) = \ell(v) = 1$ и $\ell(e_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \neq 0$. Тем самым $\ell(v) \neq 0$, что противоречит предположению $v \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Пусть теперь V конечномерно, и $e_1, \dots, e_n \in V$ — базис. Определим набор линейных функций $e_1^*, \dots, e_n^* : V \to \mathbb{F}$ равенством $e_i^*(e_j) = 1$, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$. Если $u = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$ — линейная комбинация $e_1^*, \dots, e_n^*$, то $u(e_j) = \alpha_j$. Поэтому для произвольной линейной функции $\ell : V \to \mathbb{F}$ существует ровно одна линейная комбинация такого вида, совпадающая с ℓ на всех $e_1, \dots, e_n$ — это $u = \ell(e_1)e_1^* + \dots + \ell(e_n)e_1^*$. Две линейных функции равна тогда и только тогда, когда совпадают на элементах некоторого базиса — следовательно, $u = \ell$, и $e_1^*, \dots, e_n^*$ — базис в V.

Из этого следует, что $\dim V^* = n = \dim V$ и, следовательно, $\dim(V^*)^* = \dim V$. Поскольку $\varphi : V \to (V^*)^*$ — линейный мономорфизм, он является одновременно и изоморфизмом. □

Упражнение 1. Пусть $\dim V = \aleph_0$, т.е. V имеет счетный базис $e_1, e_2, \dots$. Чему равна размерность V^*?

Для векторного подпространства $U \subset V$ символом $\operatorname{Ann}(U) \subset V^*$ обозначается аннулятор U, т.е. векторное пространство, состоящее из линейных функций $\ell : V \to \mathbb{F}$ таких, что $\ell|_U = 0$.

Теорема 4. *Если V конечномерно, то $\dim U + \dim \operatorname{Ann}(U) = \dim V$, а $\varphi(U) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис в $e_1, \dots, e_k \in U$ и достроим его векторами $e_{k+1}, \dots, e_n$ до базиса в V. Пусть $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$ — двойственный базис. Для произвольного элемента (линейной функции) $\ell \in V^*$ имеем $\ell = \ell(e_1)e_1^* + \dots + \ell(e_n)e_n^*$; отсюда вытекает, что $\ell(e_1) = \dots = \ell(e_k) = 0$ тогда и только тогда, когда ℓ является линейной комбинацией векторов $e_{k+1}^*, \dots, e_n^*$. Но равенства $\ell(e_1) = \dots = \ell(e_k) = 0$ эквивалентны тому, что $\ell \in \operatorname{Ann}(U)$, так что $e_{k+1}^*, \dots, e_n^*$ — базис в $\operatorname{Ann}(U)$, и $\dim \operatorname{Ann}(U) = n - k$.

Если $v = \varphi(u) \in V^{**}$, где $u \in U \subset V$, то для любого $\ell \in \operatorname{Ann}(U)$ имеем $v(\ell) = \ell(u) = 0$. Отсюда вытекает, что $\varphi(U) \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(U))$. С другой стороны, если $\dim U = k$, то $\dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(U)) = \dim V^{**} - \dim \operatorname{Ann}(U) = n - (n - k) = k = \dim U = \dim \varphi(U)$ (последнее равенство — поскольку φ это изоморфизм). Следовательно, включение $\varphi(U) \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(U))$ является равенством. □

Проективные подпространства $\mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$ и $(\mathbb{P}U)\check{} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\operatorname{Ann} U \subset \mathbb{P}V^*$ называются двойственными. Из второго утверждения теоремы 4 вытекает, что если отождествить V с V^{**} посредством отображения φ, то $(W\check{})\check{} = W$ для любого проективного подпространства $W \subset \mathbb{P}V$.

Теорема 5. $\operatorname{Ann} U_1 \cap \operatorname{Ann} U_2 = \operatorname{Ann}(U_1 \oplus U_2)$; $\operatorname{Ann} U_1 \oplus \operatorname{Ann} U_2 = \operatorname{Ann}(U_1 \cap U_2)$.

Доказательство. Если $\ell \in \operatorname{Ann}(U_1 \oplus U_2)$, то, поскольку $U_1, U_2 \subset U_1 \oplus U_2$, имеем $\ell \in \operatorname{Ann} U_1$ и $\ell \in \operatorname{Ann} U_2$. С другой стороны, всякий вектор $v \in U_1 \oplus U_2$ представляется в виде $v = w_1 + w_2$, где $w_1 \in U_1$, $w_2 \in U_2$. Поэтому если $\ell \in \operatorname{Ann} U_1 \cap \operatorname{Ann} U_2$, то $\ell(v) = \ell(w_1) + \ell(w_2) = 0$, так что $\ell \in \operatorname{Ann}(U_1 \oplus U_2)$. Тем самым доказано первое равенство.

Второе равенство доказывается аналогично. (Для конечномерных пространств второе равенство, кроме того, вытекает из первого и теоремы 4 — докажите!) □

Пусть $W_1, W_2 \subset \mathbb{P}V$ — проективные подпространства; обозначим $\langle W_1, W_2 \rangle \subset \mathbb{P}V$ проективное подпространство наименьшей возможной размерности, содержащее как W_1, так и W_2. Нетрудно видеть (проверьте!), что если $W_1 = \mathbb{P}U_1$, $W_2 = \mathbb{P}U_2$, то $\langle W_1, W_2 \rangle = \mathbb{P}(U_1 \oplus U_2)$. Отсюда вытекает, что $\langle W_1, W_2 \rangle$ существует и единственно. Например, если W_1 и W_2 нульмерны (точки) и не совпадают, то $\langle W_1, W_2 \rangle$ — (единственная) прямая, проведенная через эти точки, а если $W_1 = W_2$, то $\langle W_1, W_2 \rangle = W_1 = W_2$ (в нульмерном случае — точка). Тогда теорему 5 можно переформулировать так:

Следствие 2. *Пусть $W_1, W_2 \subset \mathbb{P}V$ — проективные подпространства. Тогда $\langle W_1\check{}, W_2\check{} \rangle = (W_1 \cap W_2)\check{}$ и наоборот, $\langle W_1, W_2 \rangle\check{} = W_1\check{} \cap W_2\check{}$.*

Если имеется теорема, в которой задействованы только проективные пространства, подпространства, пересечения и $\langle W_1, W_2 \rangle$, то, пользуясь теоремой 4 и следствием 2, можно написать “двойственную теорему”: заменить все W_i на $W_i\check{}$ (соответственно изменив размерность), все пересечения — на $\langle W_1, W_2 \rangle$ и наоборот.

Пример 2. Сформулируем теорему, двойственную к теореме Дезарга. Поскольку объемлющее проективное пространство — плоскость, точкам $a.a', b, b', c, c'$ двойственны прямые $\alpha, \alpha', \beta.\beta', \gamma, \gamma'$. Прямым aa', bb', cc', согласно следствию 2, двойственны точки пересечения $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ и $\gamma \cap \gamma'$. К утверждению, что три прямые пересекаются в одной точке, двойственно утверждение, что три точки лежат на одной прямой. Итого получается следующее утверждение: пусть точки пересечения прямых $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ и $\gamma \cap \gamma'$ лежат на одной прямой. Обозначим точки пересечения прямых $\{p\} = \alpha \cap \beta$, $\{p'\} = \alpha' \cap \beta'$, $\{q\} = \alpha \cap \gamma$, $\{q'\} = \alpha' \cap \gamma'$, $\{r\} = \beta \cap \gamma$, $\{r'\} = \beta' \cap \gamma'$. Тогда прямые pp', qq' и rr' пересекаются в одной точке.

Если теперь переименовать $p \mapsto a$, $q \mapsto b$, $r \mapsto c$, и соответственно p', q', r', то прямая α станет прямой ab, $\beta \mapsto bc$ и $\gamma \mapsto ac$, и соответственно α', β', γ'. Отсюда видно, что сформулированная двойственная теорема является обратной к самой теореме Дезарга: если точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой, то прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке.