ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Основные модели плоскости Лобачевского.

Плоскостью Лобачевского называется множество Π, элементы которого называются точками, в котором выделен некоторый класс подмножеств, называемых прямыми, и определена функция $\varrho : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ двух аргументов, называемая расстоянием между точками. Эта система (подмножества плюс функция) должна удовлетворять некоторому набору требований, называемых аксиомами. Мы будем формулировать аксиомы постепенно. В аксиомах первой группы не упоминается расстояние, а только точки и прямые:

A1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.

A2. Через прямую ℓ и точку a, ей не принадлежащую, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих ℓ.

(мы опускаем аксиомы типа “плоскость и прямая непусты, прямая не совпадает со всей плоскостью”).

В аксиомах не указывается, какое конкретно множество является “плоскостью”, и какие его подмножества — “прямыми”. Этот вопрос можно решить по-разному:

Пример 1 (модель Пуанкаре в полуплоскости). $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Прямыми называются дуги окружностей, центр которых лежит на оси абсцисс (границе полуплоскости), а также вертикальные открытые лучи с началом на оси абцисс.

Аксиома A2 очевидна. Аксиома A1: пусть $a, b \in \Pi$. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку $[a, b]$. Если он параллелен границе полуплоскости, то a и b лежат на одном вертикальном луче. Если он пересекает границу в точке p, то a и b лежат на одной полуокружности с центром p и радиусом ap.

Пример 2 (модель Пуанкаре в круге). Π — единичный открытый круг на плоскости с центром в начале координат. Прямые — дуги окружностей, лежащие внутри круга и пересекающие его границу под прямым углом, а также диаметры круга. Аксиома A2 очевидна. Аксиома A1: рассмотрим точки $a, b \in \Pi$ и точку a', лежащую на луче $0a$ на расстоянии $1/|a|$ от точки 0. Через точки a, b и a' проходит единственная окружность или прямая ω. Случай, когда ω — прямая, очевиден. Если ω — окружность, то, поскольку $a' \notin \Pi$, ω пересекает границу Π в двух точках, c и d. Поскольку $|c|^2 = 1 = |a|\,|a'|$, прямая $0c$ является касательной к окружности ω. Тем самым ω пересекает границу Π под прямым углом.

Пример 3 (модель Клейна). Π — единичный открытый круг на плоскости с центром в начале координат. Прямые — хорды круга. Аксиомы A1–A2 очевидны.

Пример 4 (двуполостной гиперболоид). $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$ — одна из полостей двуполостного гиперболоида. Прямые это пересечения Π с плоскостями, проходящими через начало координат. Аксиома A1: пусть $a, b \in \Pi$. Если a, b, O лежат на одной прямой, то координаты a и b пропорциональны: $a = (x, y, z)$, $b = (tx, ty, tz)$, $t > 0$. Но тогда $(tx)^2 + (ty)^2 - (tz)^2 = -t^2 = -1$, откуда $t = 1$, то есть $a = b$. Следовательно, точки O, a и b на одной прямой не лежат, так что через них можно провести единственную плоскость, пересечение которой с гиперболоидом и есть требуемая прямая.

Аксиома A2: заметим, что прямая ℓ представляет собой одну из половин гиперболы, лежащей в некоторой плоскости L (вторая половина, точки которой не принадлежат плоскости Лобачевского, симметрична первой относительно начала координат). В плоскости L проведем через начало координат прямую μ, не пересекающую ℓ; таких прямых бесконечно много. Проведем теперь плоскость M через точку a и прямую μ — она пересекает L по прямой μ и тем самым $M \cap L \cap \Pi = \varnothing$.

Разумеется, мы пока не можем утверждать, что примеры 1–4 дают модель геометрии Лобачевского — для этого мы должны сформулировать остальные аксиомы и задать в этих моделях расстояние. Докажем пока что, что эти примеры дают модель одной и той же геометрии — между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее понятие прямой.

1. Модели Пуанкаре в полуплоскости и круге. Отождествим плоскость с множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел, полуплоскость — с верхней полуплоскостью $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, а круг — с единичным кругом $\Omega = \{w \mid |w| < 1\} \subset \mathbb{C}$ с центром в нуле. Положим $f(z) = (z - i)/(z + i)$. Если $\operatorname{Im} z > 0$, то $|z - i| < |z + i|$, откуда $|f(z)| < 1$. Таким образом, $f(H) \subset \Omega$. Если $w = (z - i)/(z + i)$, то $z(w - 1) = -i(w + 1)$, откуда $z = i(1 + w)/(1 - w)$ — отображение, обратное к f. Точки 1 и -1 — концы диаметра круга Ω. Если $w \in \Omega$, то векторы $w - 1$ и $w + 1$ образуют тупой угол, так что $\arg \frac{w-1}{w+1} > \pi/2$. Следовательно, $\operatorname{Im}(i(1+w)/(1-w)) = -\operatorname{Re}((w+1)/(w-1)) > 0$. Таким образом, $f : H \to \Omega$ — взаимно однозначное отображение.

Лемма 1. *Попарно различные точки* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ *лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение* $[z_1, z_2, z_3, z_4] \overset{def}{=} \frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)} \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности. Если точки z_3 и z_4 лежат по одну сторону от хорды $(z_1 z_2)$, то $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$, то есть $\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_3 - z_2) = \arg(z_4 - z_1) - \arg(z_4 - z_2)$. Отсюда вытекает, что $\arg[z_1, z_2, z_3, z_4] = 0$, так что $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}_+$. Если точки z_3 и z_4 лежат по разные стороны от хорды $(z_1 z_2)$, то $\widehat{z_1 z_3 z_2} + \widehat{z_2 z_4 z_1} = \pi$, откуда $\arg(z_3-z_1)-\arg(z_3-z_2)+\arg(z_4-z_2)-\arg(z_4-z_1) = \pi$. Следовательно, $\arg[z_1, z_2, z_3, z_4] = \pi$, так что $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}_-$.

Случай, когда z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой, а также доказательство обратного утверждения — упражнение. □

Лемма 2. *Дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение: если* $w_k = \frac{az_k+b}{cz_k+d}$, $k = 1, \dots, 4$, *то* $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Доказательство — прямое вычисление.

Следствие 1. *Дробно-линейное преобразование переводит прямые и окружности в прямые и окружности.*

Преобразование $f : H \to \Omega$ — дробно-линейное, поэтому образами прямых Лобачевского в H являются дуги окружностей или хорды в Ω. Если $\omega \subset \mathbb{C}$ — окружность или прямая, то $\omega \cap H$ является прямой Лобачевского тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \omega$, где $c(z) \overset{\text{def}}{=} \overline{z}$ — преобразование комплексного сопряжения, т.е. симметрии относительно действительной оси. Имеем $(f \circ c)(z) = f(\overline{z}) = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}} = (\nu \circ f)(z)$, где $\nu(w) \overset{\text{def}}{=} 1/\overline{w}$ — инверсия относительно единичной окружности ω с центром в нуле. Отсюда вытекает, что образы прямых Лобачевского в полуплоскости при отображении f — дуги кривых или хорды, инвариантные относительно ν.

Лемма 3. *Если окружность* ψ *инвариантна относительно* ν, *то* ψ *и* ω *пересекаются под прямым углом.*

Доказательство. Имеем $\nu(w) = w/|w|^2$. Поэтому $\nu(a) = a$ для всех $a \in \omega$, и $\nu(\ell) = \ell$, где ℓ — прямая, проходящая через нуль. Пусть $a \in \psi \cap \omega$. Проведем прямую ℓ через 0 и a, и пусть $\ell \cap \psi = \{a, b\}$. Поскольку $\omega(\psi) = \psi$, $\omega(\ell) = \ell$ и $\omega(a) = a$, имеем $\omega(b) = b$, что возможно только если $b = a$. Таким образом, прямая ℓ — касательная к окружности ψ, откуда вытекает, что ψ и ω пересекаются под прямым углом, □

Тем самым если ψ инвариантна относительно ν, то $\Omega \cap \psi$ — прямая Лобачевского. Таким образом, f переводит прямые в прямые.

2. Круг (модель Пуанкаре) — круг (модель Клейна). Возьмем точку $c \in \Omega$ и рассмотрим произвольную прямую ℓ в смысле модели Пуанкаре такую, что $c \in \ell$. Прямая ℓ это дуга с концами $a, b \in \omega$; возьмем в качестве $f(c)$ точку пересечения прямой $0c$ с хордой ab.

Очевидно по построению, что f переводит прямые Пуанкаре в прямые Клейна. Поэтому в проверке нуждается только корректность определения: нужно проверить, что точка $f(c)$ не зависит от выбора дуги $\ell \ni c$.

Лемма 4. *Пусть* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *— окружности на плоскости, причем* $\omega_1 \cap \omega_2 = \{a_{12}, b_{12}\}$, $\omega_2 \cap \omega_3 = \{a_{23}, b_{23}\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{a_{13}, b_{13}\}$. *Тогда прямые* $(a_{12}b_{12})$, $(a_{23}b_{23})$, $(a_{13}b_{13})$ *пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть окружность ω_i задается на плоскости уравнением $(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = r_i^2$; здесь $i = 1, 2, 3$ Рассмотрим множества $\ell_{12}, \ell_{23}, \ell_{13}$, заданные уравнениями $\ell_{ij} : (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = (x - p_j)^2 + (y - q_j)^2 - r_j^2$. Эти уравнения линейны (члены x^2, y^2 сокращаются!), поэтому множества ℓ_{ij} — прямые. Очевидно также, что $a_{ij}, b_{ij} \in \ell_{ij}$, и поэтому ℓ_{ij} это прямая $(a_{ij}b_{ij})$. Точка пересечения $\ell_{12} \cap \ell_{23}$ удовлетворяет равенствам $(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-r_1^2 = (x-p_2)^2+(y-q_2)^2-r_2^2 = (x-p_3)^2+(y-q_3)^2-r_3^2$, и поэтому принадлежит также и ℓ_{13}. □

Пусть теперь ψ_1, ψ_2 — окружности, пересекающие ω под прямым углом в точках a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно; пусть $c = \psi_1 \cap \psi_2 \cap \Omega$. Согласно лемме 3 $\nu(c)$ — другая точка пересечения ψ_1 и ψ_2 (лежащая вне Ω). Точки c и $\nu(c)$ лежат на прямой ℓ, проходящей через начало координат. Согласно лемме 4 хорды a_1b_1 и a_2b_2 пересекаются в точке, лежащей на прямой ℓ. Отсюда, очевидно, вытекает, что отображение f определено корректно.

3. Гиперболоид — круг (модель Клейна). Точке $a \in \Pi$ сопоставим ее проекцию (из начала координат) на плоскость $z = 1$. Тогда образом Π будет круг $\{(x, y, z) \mid x^2+y^2 < 1, z = 1\}$, а образами прямых — пересечения этого круга и плоскостей, проходящих через начало координат, т.е. хорды.

Абсолютом в модели Пуанкаре в полуплоскости называется вещественная ось; в модели в круге (Пуанкаре или Клейна) — граница круга. Нетрудно видеть, что соответствия 1 и 2 продолжаются на абсолют и переводят абсолют в абсолют.