ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Аффинные преобразования плоскости Лобачевского.

Пусть Π — одна из четырех рассмотренных ранее моделей плоскости Лобачевского. Непрерывное взаимно однозначное отображение $f : \Pi \to \Pi$ называется аффинным, если оно переводит прямые в прямые. Как нетрудно заметить, аффинные преобразования каждой из моделей образуют группу (действующую на Π); отождествления моделей, рассмотренные в лекции 9, являются гомеоморфизмами и переводят прямые в прямые. Следовательно, эти отождествления порождают изоморфизмы групп аффинных преобразований (и изоморфизмы их действий — уточните!). Мы опишем аффинные преобразования в модели Пуанкаре в полуплоскости.

Замечание. В принципе, можно дать определение аффинного преобразования *плоскости Лобачевского* (а не модели), но для этого нужно ввести на плоскости Лобачевского топологию — чтобы можно было говорить о непрерывных отображениях. В общем виде это делается с помощью метрики (расстояния). Поскольку мы еще не формулировали аксиомы, связанные с метрикой, мы будем изучать аффинные преобразования конкретных моделей, а общую картину обсудим позднее.

Топология в моделях Пуанкаре и Клейна "наследуется" из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, чьими подмножествами эти модели являются.

Теорема 1. *Любое преобразование вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, а также любое преобразование вида $f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc < 0$, является аффинным в модели Пуанкаре в полуплоскости.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай (дробно-линейные преобразования); второй случай аналогичен. Дробно-линейное преобразование переводит окружности и прямые в окружности и прямые. Поскольку $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, вещественная ось переходит в вещественную ось; следовательно, верхняя полуплоскость H переходит либо в себя, либо в нижнюю полуплоскость. Поскольку $f(i) = \frac{bd+ac}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2} \in H$, получаем $f(H) = H$.

Если ω — окружность или прямая, то $\omega \cap H$ — прямая Лобачевского тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \omega$, где c — комплексное сопряжение. Поскольку $f \circ c = c \circ f$, преобразование f переводит прямые Лобачевского в прямые Лобачевского. $\square$

Преобразования, упомянутые в теореме 1, будем называть аффинными преобразованиями стандартного вида.

Прямые Лобачевского называются параллельными, если они имеют общую точку на абсолюте (в моделях, где абсолют существует — то есть в моделях Пуанкаре и в модели Клейна в круге); в модели Клейна на гиперболоиде прямые параллельны, если соответствующие им плоскости в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по образующей конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Если прямые не пересекаются и не параллельны, они называются расходящимися.

Теорема 2. *Аффинное преобразование плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре в полуплоскости) переводит параллельные прямые в параллельные. Оно непрерывно продолжается на абсолют и однозначно определяется своим ограничением на абсолют.*

Доказательство. Пусть $\Phi : H \to H$ — аффинное преобразование, а ℓ_1, ℓ_2 — параллельные прямые. Тогда прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ не имеют общих точек, т.е. либо параллельны, либо расходятся.

Обозначим $M(\ell_1, \ell_2)$ множество прямых, пересекающих ℓ_1, но не пересекающих ℓ_2. Отображение Φ гомеоморфно отображает множество $M(\ell_1, \ell_2)$ в множество $M(\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2))$. Но для параллельных прямых m_1, m_2 множество $M(m_1, m_2)$ линейно связно, а для расходящихся — нет (докажите!). Поэтому прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ параллельны.

Пусть a — точка абсолюта. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через a, и выберем в качестве $\Phi(a)$ точку пересечения прямой $\Phi(\ell)$ с абсолютом (подумайте, как понять, какую из двух!). Поскольку Φ переводит параллельные прямые в параллельные, результат не зависит от выбора прямой $\ell \ni a$.

Последнее утверждение леммы следует из того, что всякая точка плоскости Лобачевского может быть представлена как пересечение прямых, а прямая полностью определяется своим пересечением с абсолютом. $\square$

Следствие 1 (теорем 1 и 2)**.** *Для любых трех различных точек абсолюта существует аффинное преобразование стандартного вида, переводящее эти точки в 0, 1 и ∞.*

Доказательство. Абсолют в модели Пуанкаре (включая точку ∞) — (вещественная) проективная прямая, а ограничение аффинного преобразования стандартного вида на абсолют — проективное преобразование.

Для любых трех различных точек $p, q, r \in \mathbb{R}$ существует проективное (т.е. дробно-линейное) преобразование $f(t) = (at+b)/(ct+d)$, где $ad - bc \neq 0$ и $f(p) = 0$, $f(q) = 1$, $f(r) = \infty$. Если $ad - bc > 0$, то преобразование $z \mapsto f(z)$, где $z \in H$, является аффинным в модели Пуанкаре. Если $ad - bc < 0$, аффинным является преобразование $z \mapsto f(\bar{z})$. $\square$

Теорема 3. *Если аффинное преобразование Φ оставляет три различные точки абсолюта на месте, то оно является тождественным.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 1. *Если $\psi_1 \subset H$ — прямая Лобачевского, пересекающая абсолют в точках p, q, а $\psi_2 \subset H$ — прямая Лобачевского, пересекающая абсолют в точках r, s, а t — проекция на абсолют точки $\psi_1 \cap \psi_2$, то $(s-q)/(q-t) = (t-r)/(r-p)$.*

Доказательство. Гомотетия с центром t и коэффициентом $(q-t)/(t-r)$ переводит q в r и, следовательно, ψ_1 в ψ_2. Абсолют гомотетия переводит в себя. Следовательно, p переходит в s, что и означает равенство, приведенное в лемме. $\square$

Доказательство теоремы 3. Следствие 1 позволяет считать, что Φ оставляет на месте точки 0, 1 и ∞. Обозначим φ ограничение Φ на абсолют; согласно теореме 2 нам достаточно доказать, что $\varphi(t) \equiv t$.

Пусть $m = x + iy \in H$. Прямая $(m0)$ пересекает абсолют в точках 0 и a, прямая $(m1)$ — в точках 1 и b, прямая $(m\infty)$ — вертикальный луч с абсциссой x. По лемме 1 $b = (1-a)x/(1-x)$. Образ $\Phi((m0))$ — прямая, соединяющая 0 и $\varphi(a)$, образ $\Phi((m1))$ — прямая, соединяющая 1 и $\varphi(b)$, образ $(m\infty)$ — вертикальный луч с абсциссой $\varphi(x)$. По лемме 1 $\varphi(b) = (1-\varphi(a))\varphi(x)/(1-\varphi(x))$. Таким образом, для всех x, a имеет место соотношение $\varphi(\frac{(1-a)x}{1-x}) = \frac{(1-\varphi(a))\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$.

Положим вначале $x = 1/2$. Тогда $\forall a\, \varphi(1-a) = \lambda(1-\varphi(a))$, где $\lambda = \varphi(1/2)/(1-\varphi(1/2))$. Применяя это соотношение дважды, получим $\forall a\, \varphi(a) = \varphi(1-(1-a)) = \lambda(1-\varphi(1-a)) = \lambda - \lambda^2 + \lambda^2\varphi(a)$, откуда $\lambda = 1$, и $\varphi(1-a) = 1 - \varphi(a)$. Теперь основное соотношение можно переписать так: $\varphi(\frac{(1-a)x}{1-x}) = \frac{\varphi(1-a)\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$.

Возьмем теперь $a = 0$. Поскольку $\varphi(1) = 1$, получается соотношение $\varphi(\frac{x}{1-x}) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$. Теперь тождество принимает вид: $\varphi((1-a)\cdot\frac{x}{1-x}) = \varphi(1-a)\cdot\varphi(\frac{x}{1-x})$. Полагая $1 - a = y$, $x/(1-x) = z$, получаем, что $\varphi(yz) = \varphi(y)\varphi(z)$.

Пусть $\varphi(2) = u$. Тогда $\varphi(2^\alpha) = \varphi(2)^\alpha = u^\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathbb{N}$. Равенство $1 = \varphi(2^\alpha \cdot 2^{-\alpha}) = u^\alpha \cdot \varphi(2^{-\alpha})$ показывает, что $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ также и для отрицательных α. Теперь $u^p = \varphi((2^{p/q})^q) = \varphi(2^{p/q})^q$, откуда вытекает равенство $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$. В силу непрерывности φ получим, что $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Тем самым $\varphi(t) = \varphi(2^{\log_2 t}) = u^{\log_2 t} = 2^{\log_2 t \cdot \log_2 u} = t^{\log_2 u} \stackrel{\text{def}}{=} t^r$. Из равенства $\varphi(\frac{x}{1-x}) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$ получаем $r = 1$. $\square$

Теорема 4. *Любое аффинное преобразование плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре в полуплоскости) это преобразование стандартного вида.*

Доказательство. Пусть $f : H \to H$ — аффинное преобразование. Продолжим его на абсолют (это возможно, согласно теореме 2), и пусть $f(0) = p$, $f(1) = q$, $f(\infty) = r$. Пусть $g : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ — дробно-линейное преобразование, для которого $g(p) = 0$, $g(q) = 1$, $g(r) = \infty$. Согласно следствию 1, g является ограничением на абсолют аффинного преобразования $h : H \to H$ стандартного вида. Преобразование $f \circ h$ — аффинное и оставляет на месте точки $0, 1, \infty$ абсолюта. Согласно теореме 3, $f \circ g = \mathrm{id}$, откуда $f = g^{-1}$ — преобразование стандартного вида. $\square$

Флагом на плоскости Лобачевского Π назовем тройку (a, p, S), состоящую из точки $a \in \Pi$, луча (полупрямой) p с началом a и полуплоскости $S \subset \Pi$, на границе которой лежит луч p.

Предложение 1. *Для любых двух флагов (a_1, p_1, S_1), (a_2, p_2, S_2) существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее один в другой.*

Доказательство. Докажем это для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

Обозначим ℓ_1, ℓ_2 прямые, содержащие лучи p_1, p_2, и пусть ℓ_i пересекает абсолют в точках a_i, b_i $(i = 1, 2)$. Согласно следствию 1 лекции 10, существует аффинное преобразование $f : H \to H$, для которого $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$. Тогда $f(\ell_1) = \ell_2$, то есть аффинным преобразованием можно перевести любую прямую в любую прямую.

Пусть теперь $\ell \subset H$ — прямая, $a_1, a_2 \in \ell$; докажем, что существует аффинное преобразование $f : H \to H$, для которого $f(a_1) = a_2$ и $f(\ell) = \ell$. Без ограничения общности можно считать (почему?), что ℓ — положительная мнимая полуось, так что $a_1 = k_1 i$, $a_2 = k_2 i$, $k_1, k_2 > 0$. Тогда преобразование $f(z) = k_2/k_1 \cdot z$

переводит a_1 в a_2 и сохраняет ℓ. Как следствие, для любых двух прямых ℓ_1, ℓ_2 и любых двух точек $a_1 \in \ell_1$, $a_2 \in \ell_2$ существует аффинное преобразование, переводящее a_1 в a_2 и ℓ_1 в ℓ_2.

Произвольную прямую ℓ точка $a \in \ell$ разбивает на два луча, концом которых является; докажем, что существует аффинное преобразование, меняющее эти лучи местами (и тем самым сохраняющее точку a и прямую ℓ). Без огнраничения общности можно считать (почему?), что ℓ — положительная мнимая полуось и $a = i$. Тогда возьмем $f(z) = 1/\overline{z}$.

Любая прямая ℓ разбивает плоскость Лобачевского на две полуплоскости; докажем, что существует аффинное преобразование, переводящее в себя все точки прямой ℓ (и тем самым, все лучи, лежащие на ℓ) и меняющее эти полуплоскости местами. Без ограничения общности можно считать (как и в предыдущем случае), что ℓ — положительная мнимая полуось; тогда $f(z) = -\bar{z}$.

Тем самым доказано (почему?) существование аффинного преобразования, переводящего произвольный флаг (a_1, p_1, S_1) в произвольный флаг (a_2, p_2, S_2).

Для доказательства единственности достаточно (почему?) рассмотреть ситуацию, когда $a_1 = a_2 = i$, $p_1 = p_2$ — луч с началом в i вертикально вверх, и $S_1 = S_2$ — правая полуплоскость (множество чисел с положительной вещественной и мнимой частью). Тогда ограничение аффинного преобразования на абсолют сохраняет точки 0 и ∞, и поэтому имеет вид $f(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$. Значит, либо $\Phi(z) = cz$, $c > 0$, либо $\Phi(z) = c\overline{z}$, $c < 0$. Но из всех таких преобразований точку i и правую полуплоскость сохраняет только тождественное преобразование. $\square$

Заметим, что в евклидовом случае соответствующее множество аффинных преобразований бесконечно — группа аффинных преобразований плоскости Лобачевского “меньше”, чем соответствующая группа евклидовой плоскости.