ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Метрика на плоскости Лобачевского.

Завершим определение плоскости Лобачевского, сформулировав оставшиеся аксиомы, после чего проверим, что введенные в прошлой лекции "стандартные модели" (Пуанкаре в полуплоскости и в круге, Клейна в круге и на гиперболоиде) — действительно модели геометрии Лобачевского. Напомним, что все аксиомы, которые будут сформулированы ниже, выполнены и в евклидовой геометрии — единственным отличием ее от геометрии Лобачевского является аксиома параллельных.

Вторая группа аксиом геометрии Лобачевского — свойства расстояния:

A3. $\varrho(a,b) \geq 0$, причем $\varrho(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
A4. $\varrho(a,b) = \varrho(b,a)$.
A5. $\varrho(a,c) \leq \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$.

Коротко: плоскость Лобачевского — метрическое пространство (если X — произвольное множество, а $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая аксиомам A3–A5, то X называют метрическим пространством, а ϱ — расстоянием, или метрикой).

Следующие аксиомы связывает понятие прямой и понятие расстояния:

A6. Если $\varrho(a,c) = \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$, то точки a, b и c лежат на одной прямой; в этом случае говорят, что b лежит между a и c.
A7. Из любых трех различных точек прямой ℓ ровно одна лежит между двумя другими.

Определим теперь расстояние ϱ в модели Пуанаре в верхней полуплоскости. Для этого выберем гладкую функцию $\varphi : \Pi \to \mathbb{R}_+$ и пусть теперь $\gamma : [0,1] \to \Pi$ — гладкая кривая, соединяющая точки $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Поскольку $\Pi \subset \mathbb{R}^2$, можно записать $\gamma(t)$ в координатах: $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Вектор $\gamma'(t) \stackrel{\text{def}}{=} (u'(t), v'(t))$ естественно называть вектором скорости кривой в точке $\gamma(t)$. Назовем теперь *длиной* вектора скорости величину $\|\gamma'(t)\|_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)| = \varphi(\gamma(t))\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}$ — заметим, что она зависит как от самого вектора скорости $\gamma'(t)$, так и от "точки приложения" $\gamma(t)$. *Длиной кривой* γ назовем величину $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_\varphi \, dt$. Множество длин всевозможных кривых, соединяющих a и b (т.е. таких, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$), обозначим $R_\varphi(a,b)$; расстояние между точками a и b определим формулой $\varrho_\varphi(a,b) = \inf R_\varphi(a,b)$.

Замечание. На самом деле эта точная нижняя грань достигается (в множестве $R_\varphi(a,b)$ есть наименьший элемент), то есть расстояние можно определить как длину кратчайшей кривой, соединяющей a и b. Нам этот факт (верный для произвольной функции φ!) не понадобится и доказывать его мы не будем.

Предложение 1. *Расстояние ϱ_φ (с любой функцией φ) удовлетворяет аксиомам A3–A5.*

Доказательство. A4: если кривая $\gamma(t)$ соединяет a и b, то кривая $\tilde{\gamma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ соединяет b и a. Очевидно, $\|\tilde{\gamma}'(t)\|_\varphi = \|\gamma'(1-t)\|_\varphi$, откуда вытекает, что $\ell_\varphi(\tilde{\gamma}) = \ell_\varphi(\gamma)$. Тем самым $R_\varphi(a,b) = R_\varphi(b,a)$, откуда $\varrho_\varphi(a,b) = \varrho_\varphi(b,a)$.

A5: соединим точки a и c кривой γ_1, а точки c и b кривой γ_2. Объединение этих кривых — назовем его γ — соединяет a и b. Кривая γ не является гладкой; для произвольного $\varepsilon > 0$ ее, однако, можно сгладить вблизи точки c так, чтобы получилась гладкая кривая $\tilde{\gamma}$, обладающая свойством $\ell_\varphi(\tilde{\gamma}) \leq \ell_\varphi(\gamma_1) + \ell_\varphi(\gamma_2) + \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in R_\varphi(a,c), y \in R_\varphi(c,b) \, \exists z \in R_\varphi(a,b) : z \leq x + y + \varepsilon$. Отсюда немедленно вытекает, что $\varrho_\varphi(a,b) = \inf R_\varphi(a,b) \leq \inf R_\varphi(a,c) + \inf R_\varphi(b,c) = \varrho_\varphi(a,c) + \varrho_\varphi(b,c)$.

A3: пусть $a \neq b$. Рассмотрим какой-нибудь прямоугольник $P \subset \Pi$, содержащий a и b внутри себя. Прямоугольник P компактен (это легко вытекает из доказанной в курсе анализа компактности отрезка), функция $\varphi(x,y)$ из определения расстояния непрерывна. Следовательно, φ достигает в P своего наименьшего значения $m > 0$; так что $\varphi(p) \geq m > 0$ для всех $p \in P$.

Пусть сначала кривая γ, соединяющая a и b, целиком содержится в P. Для любых двух векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ имеет место неравенство $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$, откуда вытекает, что модуль интеграла от произвольной вектор-функции не превосходит интеграла от ее модуля (интеграл от вектор-функции является вектором и вычисляется покомпонентно). Тогда имеем $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)| \, dt \geq m \int_0^1 |\gamma'(t)| \, dt \geq m \left| \int_0^1 \gamma'(t) \, dt \right| = m\,|b-a|$.

Пусть теперь кривая γ пересекает границу ∂P прямоугольника. Граница прямоугольника $\partial P \subset P$ замкнута и, следовательно, компактна (поскольку P компактен). Функция $r : \partial P \to \mathbb{R}$, заданная равенством $r(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x-a|$, непрерывна и, следовательно, достигает на ∂P своего наименьшего значения $r_* > 0$. Множество $T = \gamma^{-1}(\partial P) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in \partial P\}$ также замкнуто (поскольку γ непрерывна). Следовательно, T содержит наименьшее число $t_* > 0$ ($0 \notin T$, поскольку $a = \gamma(0)$ лежит внутри P). Тогда $\ell_\varphi(\gamma) \geq \int_0^{t_*} \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \geq m\int_0^{t_*} |\gamma'(t)|\,dt \geq m\left|\int_0^{t_*}\gamma'(t)\,dt\right| = m\,|a-\gamma(t_*)| \geq mr_*$.

Из двух полученных оценок вытекает, что $\varrho_\varphi(a,b) = \inf R_\varphi(a,b) \geq \min(m\,|b-a|\,, mr_*) > 0$. □

Справедливость аксиом А6 и А7 зависит от выбора функции φ.

Теорема 1. *Существует и единственна с точностью до пропорциональности функция φ такая, что $\ell_\varphi(\gamma) = \ell_\varphi(f\circ\gamma)$ для всякой кривой ℓ и всякого аффинного преобразования $f : \Pi \to \Pi$. Расстояние ϱ_φ удовлетворяет аксиомам А6 и А7.*

Лемма 1. *Пусть f — аффинное преобразование плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в полуплоскости, и $f(z) = z$. Тогда $|f(z+\delta) - z| = |\delta| + o(\,|\delta|)$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$; второй случай разбирается аналогично. Из формулы Тейлора следует, что утверждение леммы эквивалентно тому, что $|f'(z)| = 1$.

$f(z+\delta) - z = f(z+\delta) - f(z) = f'(z)\delta + o(\delta)$ при $\delta \to 0$. Таким образом, $|f(z+\delta)-z| = |f'(z)|\,|\delta| + o(\,|\delta|)$, и нужно доказать, что $|f'(z)| = 1$. Имеем $f'(z) = (ad-bc)/(cz+d)^2$. Равенство $z = f(z)$ означает $z = (az+b)/(cz+d)$; поскольку $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, имеем $\bar z = (a\bar z + b)/(c\bar z + d)$. Вычитая эти равенства друг из друга, получим $z - \bar z = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar z+b}{c\bar z+d} = \frac{(az+b)(c\bar z+d)-(a\bar z+b)(cz+d))}{(cz+d)(c\bar z+d)} = \frac{(ad-bc)(z-\bar z)}{|cz+d|^2} = |f'(z)|\,(z-\bar z)$, откуда вытекает требуемое. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(i) \stackrel{\text{def}}{=} k > 0$. Теперь для каждого $z \in H$ рассмотрим дробно-линейное преобразование $f : H \to H$ такое, что $f(z) = i$. Положим по определению $\varphi(z) = k\,|f'(z)|$. Определение, очевидно, корректно: если f_1, f_2 — два таких преобразования, то преобразование $g = f_2^{-1}\circ f_1$ сохраняет точку z. Из леммы 1 вытекает, что $|g'(z)| = 1$; по формуле для производной обратной функции $g'(z) = f_1'(z)/f_2'(z)$. Отсюда $|f_1'(z)| = |f_2'(z)|$.

Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to H$ — кривая, $F : H \to H$ — дробно-линейное преобразование, и $\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(t))$. Если $f(\lambda(t)) = i$, то $(f\circ F)(\gamma(t)) = i$. По правилу дифференцирования сложной функции $\lambda'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Теперь $\varphi(\lambda(t))\,|\lambda'(t)| = c\,|f'(\lambda(t))\lambda'(t)| = c\,|f'(\lambda(t))F'(\gamma(t))\gamma'(t)| = c\,|(f\circ F)'(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)| = \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|$. Отсюда вытекает, что $\ell_\varphi(\lambda) = \int_0^1 \varphi(\lambda(t))\,|\lambda'(t)|\,dt = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \ell_\varphi(\gamma)$ — дробно-линейные преобразования сохраняют длины кривых.

Пусть теперь $F : H \to H$ — параллельный перенос на вектор, параллельный оси абсцисс. Он является аффинным преобразованием и, следовательно, сохраняет метрику Лобачевского. С другой стороны, евклидову длину он также сохраняет. Отсюда вытекает, что функция $\varphi : H \to \mathbb{R}$ не зависит от абсциссы точки: $\varphi = \varphi(y)$. Отсюда вытекает, что длины кривых не меняются также и при преобразовании $\xi(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\bar z$. Поскольку каждое аффинное преобразование H — либо дробно-линейное, либо композиция дробно-линейного и ξ, длина кривой не меняется при любых аффинных преобразованиях.

Докажем теперь, что кратчайшей кривой, соединяющей две точки $a, b \in H$, является отрезок прямой Лобачевского (ab). Аффинным преобразованием можно добиться того, чтобы a и b лежали на одном вертикальном луче: $a = (p, y_1)$, $b = (p, y_2)$. Поскольку метрика аффинно инвариантна, достаточно доказать утверждение для таких точек. Соединим a и b произвольной кривой $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$.

Лемма 2. *Если $\gamma_x \neq const.$ (то есть кривая γ не идет по вертикальному лучу), то существует кривая γ_0, соединяющая точки a и b и такая, что $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_0(t) = (p, \gamma_y(t))$ — вертикальная кривая, соединяющая a и b. Тогда $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\sqrt{(\gamma_x'(t))^2 + (\gamma_y'(t))^2}\,dt = \int_0^1 \varphi(\gamma_0(t))\sqrt{(\gamma_x'(t))^2 + (\gamma_y'(t))^2}\,dt$ (поскольку φ не зависит от абсциссы точки) $> \int_0^1 \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma_y'(t)|\,dt = \ell_\varphi(\gamma_0)$. □

Пусть, для опрелделенности, $y_2 > y_1$, т.е. точка b лежит выше точки a.

Лемма 3. *Если кривая $\gamma(t) = (p, \gamma_y(t))$ идет по вертикальному лучу, но не монотонна (функция γ_y не является возрастающей), то существует кривая γ_0, соединяющая точки a и b и такая, что $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$.*

Доказательство. Если γ_y не монотонна, то существуют числа $t_1 < t_2$ такие, что $\gamma_y(t_1) = \gamma_y(t_2)$. Пусть $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \stackrel{\text{def}}{=} a$; очевидно, $a > 0$. Рассмотрим кривую $\gamma_0(t) = (p, \gamma_{0,y}(t))$ такую, что $\gamma_{0,y}(t) = \gamma_y(t)$ при $0 \leq t \leq t_1 - \varepsilon$ и $t_2 + \varepsilon \leq t \leq 1$, $\gamma_{0,y}(t) = \gamma_y(t_1) = \gamma_y(t_2)$ при $t_1 \leq t \leq t_2$, а на интервалах $(t_1 - \varepsilon, t_1)$ и

$(t_2, t_2+\varepsilon)$ функция $\gamma_{0,y}$ как-то сглажена (чтобы существовала производная). Ясно, что число ε и сглаживание можно выбрать так, чтобы $\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma'_{0,y}(t)|\,dt + \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma'_{0,y}(t)|\,dt < a$. Тогда, очевидно, $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$. □

Пусть теперь γ идет по вертикальному лучу: $\gamma(t) = (p, \gamma_y(t))$ и γ_y монотонно возрастает, так что $\gamma'_y(t) \geq 0$. Тогда $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma_y(t))\gamma'_y(t)\,dt = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy$ (замена переменной $y = \gamma_y(t)$) — иными словами, у всех таких кривых одинаковая длина. Следовательно, $\varrho_\varphi(a,b) = \inf_{\gamma(0)=a,\gamma(1)=b} \ell_\varphi(\gamma) = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy$, причем нижняя грань достигается на любой кривой, монотонно идущей от a к b вдоль вертикального луча. Из аффинной инвариентности длины вытекает теперь, что кратчайшая кривая между любыми точками — соединяющий их отрезок прямой Лобачевского, проходимый монотонно.

Аксиома A6 теперь очевидна: пусть длина кривой, составленной из отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, равна длине кратчайшей кривой, соединяющей a и c. Тогда из леммы 2 вытекает, что эти два отрезка лежат на одной прямой. Аксиома A7: $\varrho(a,c) = \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$, если точка b лежит на отрезке $[a,c]$. □

В определение плоскости Лобачевского входит еще одно требование, называемое *аксиомой подвижности*:

A8. Для любых двух флагов на плоскости Лобачевского существует ровно одно движение, переводящее один флаг в другой.

Дополнение (к теореме 1)**.** *Метрика ϱ_φ на плоскости Лобачевского удовлетворяет аксиоме A8.*

Доказательство. Аффинные преобразования сохраняют расстояние между точками. С другой стороны, из аксиом A6 и A7 вытекает, что преобразование, сохраняющее расстояние, аффинно. Но для аффинных преобразований аксиома уже доказана в лекции 10. □

Вычислим функцию φ. Преобразование $f(z) = z/\alpha$, $\alpha > 0$, переводит αi в i. Теперь $\varphi(\alpha i) = k\,|f'(\alpha i)| = k/\alpha$. Поскольку φ зависит только от ординаты точки, имеем $\varphi(x,y) = k/y$.