1. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Группа преобразований множества M это подгруппа группы обратимых отображений $M \to M$ с операцией композиции, т.е. множество G обратимых отображений $M \to M$ такое, что если $g, h \in G$, то $gh \in G$ и $g^{-1} \in G$. В частности, всякая группа преобразований содержит тождественное отображение $\mathrm{id}_M = gg^{-1}$.

Говорят, что точки $a, b \in M$ эквивалентными (относительно группы преобразований G), если $\exists g \in G : b = g(a)$ (нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности — это вытекает из того, что G — группа). Классы эквивалентности по этому отношению называются *орбитами* группы преобразований G. Группа преобразований называется *транзитивной*, если она имеет только одну орбиту.

Для произвольного подмножества $N \subset M$ и произвольной группы G преобразований множества M нормализатором N называется множество $\mathrm{Norm}_G(N)$ преобразований $g \in G$ таких, что $g(N) = N$. Нормализатор одноточечного множества $N = \{a\}$ называется стабилизатором точки и обозначается Stab_a. Как нетрудно видеть, нормализатор (в частности, стабилизатор) — подгруппа G. Если точки a и b принадлежат одной орбите, то подгруппы Stab_b и Stab_a сопряжены: $\mathrm{Stab}_b = g\,\mathrm{Stab}_a\,g^{-1}$, где $g \in G$таково, что $g(a) = b$.

Задача 1. Пусть $V \subset W$ — гиперплоскость (подпространство коразмерности 1), $a \notin V$ и $L = a + V \subset W$. а) Пусть $a_1, \dots, a_k \in L$. Докажите, что точка $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in L$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. б) Пусть $a_0, \dots, a_n \in L$ — точки общего положения. Докажите, что для любой точки $x \in L$ существуют и единственны числа $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ такие, что $x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ (равенство векторов в W) и $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Числа $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ называются аффинными координатами точки x.

Задача 2. а) Найдите аффинные координаты точки, лежащей на отрезке $[a_0, a_1]$ и делящей его в отношении $p : q$, считая от a_0. б) Назовем центром тяжести точек $a_1, \dots, a_k \in L$ точку $(a_1 + \dots + a_k)/k$ (это точка L, согласно задаче 1а). Докажите, что центр тяжести точек $a_1, \dots, a_k$ лежит на отрезке, соединяющем точку a_i с центром тяжести остальных точек $a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_k$, и делит этот отрезок в отношении $(k-1) : 1$. В частности, отсюда вытекает, что все такие отрезки имеют общую точку.

Пусть M — центрально симметричный шестиугольник, у которого каждая большая диагональ параллельна тем сторонам, которые ее не пересекают. Обозначим G нормализатор M в группе обратимых аффинных преобразований плоскости.

Задача 3. а) Из скольких элементов состоит группа G? б) Опишите орбиты G. в) Докажите, что всякий элемент группы G переводит произвольную диагональ M в диагональ. г) Из пункта 3в следует, что группе G соответствует группа преобразований на множестве диагоналей M. Опишите орбиты этой группы. д) Вопрос, аналогичный 3в и 3г, для множества треугольников с вершинами в вершинах M.

Сокращенно вопросы, подобные 3г, формулируют так: "найдите орбиты действия группы G на диагоналях шестиугольника".

Задача 4. Найдите орбиты действия группы $\mathrm{GL}(n)$ обратимых линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ на множестве а) векторов $v \in \mathbb{R}^n$, б) пар векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, в) троек векторов $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$.

Указание. Начните со случаев $n = 1, 2, 3$.

Задача 5. Опишите (как группу) нормализатор а) правильного n-угольника в группе обратимых аффинных преобразований плоскости, б) правильного тетраэдра в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^3$, в) куба в той же группе, г) правильного симплекса в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$.

Полным флагом в правильном многограннике M называется последовательность его граней $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$, где грань F_i имеет размерность i и $F_n = M$.

Задача 6. а) Докажите, что каждая из групп преобразований, описанных в задаче 5, действует транзитивно на множестве полных флагов соответствующего многогранника. б) Докажите, что нормализатор любого полного флага в задаче 5 тривиален.

Многогранник, нормализатор которого в соответствующей группе обратимых аффинных преобразований обладает свойствами 6а и 6б, называется правильным.

Пусть L — аффинная плоскость, $B : L \to L$ — обратимое отображение, обладающее таким свойством: если $x, y, z \in L$ лежат на одной прямой, то $B(x), B(y), B(z)$ также лежат на одной прямой. Непрерывность B не предполагается!

Задача 7. Докажите, что а) образом прямой при отображении B является прямая, б) образом параллельных прямых являются параллельные прямые, в) если $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, то $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$, так что определено отображение $\widetilde{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, как для аффинных преобразований. г) Докажите, что отображение $\widetilde{B}$, определенное в задаче 7в, аддитивно: $\widetilde{B}(v_1 + v_2) = \widetilde{B}(v_1) + \widetilde{B}(v_2)$. д) Докажите, что $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$ для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^2$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Задача 8. Рассмотрим базис e_1, e_2 в $\mathbb{R}^2$, и пусть $f_i = \widetilde{B}(e_i)$, $i = 1, 2$. Согласно предположению про B, имеем $\widetilde{B}(te_1) = u(t)f_1$, $\widetilde{B}(te_2) = v(t)f_2$ для некоторых функций $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. а) Докажите, что $v(t) = u(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. б) Докажите, что $u(t) = t$ при $t \in \mathbb{Q}$. в) Докажите, что $u(t_1 + t_2) = u(t_1) + u(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. г) Докажите, что $u(t_1 t_2) = u(t_1)u(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. д) Докажите, что если $t > 0$, то $u(t) > 0$. е) Докажите, что $u(t) = t$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, отображение $B : L \to L$ аффинно.