2. ВЫПУКЛОСТЬ.

Задача 1. а) Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ — компакт. Известно, что любые $d+1$ точек $a_1, \dots, a_{d+1} \in X$ лежат в шаре радиуса 1. Докажите, что все X лежит в шаре радиуса 1. б) На плоскости имеется конечное множество точек, попарные расстояния между которыми не превышают 1. Докажите, что все точки содержатся внутри круга радиуса $1/\sqrt{3}$.

Задача 2. а) Докажите, что выпуклая оболочка компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. б) Приведите пример замкнутого множества $Y \subset \mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка которого не замкнута. в) Верно ли, что замыкание выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло?

Задача 3. а) Приведите контрпример к теореме Хелли в случае, когда набор выпуклых множеств $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ бесконечен. б) Докажите теорему Хелли для бесконечного набора выпуклых компактных подмножеств $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$, заданная уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, а $I \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1|, \dots, |x_4| \le 1\}$ — четырехмерный куб. Обозначим $M = I \cap H$ (главное сечение куба).

Задача 4. Пусть $f_1 = (1, 1, -1, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, -1, 1)$. а) Докажите, что $M = \{y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 \mid |y_1 \pm y_2 \pm y_3| \le 1\}$ (всего 4 условия с модулем). б) Опишите вершины, ребра и двумерные грани многогранника M.

Задача 5. а) Докажите, что нормализатор $G = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aff}(4)}(M)$ многогранника M в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^4$ транзитивно действует на множестве вершин M. б) Для произвольной вершины $a \in M$ докажите, что ее нормализатор $G_0 = \mathrm{Norm}_G(a)$ в группе G действует транзитивно на множестве ребер, выходящих из этой вершины. в) Для произвольного ребра b, выходящего из вершины a, докажите, что нормализатор $G_1 = \mathrm{Norm}_{G_0}(b)$ в группе G_0 действует транзитивно на двумерных гранях, содержащих ребро b. г) Докажите, что многогранник M правильный. Как он называется?

Указание. Достаточно рассмотреть аффинные преобразования, сохраняющие как I, так и H.

Задача 6. Пусть $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ — целые числа. Многогранник Гельфанда–Цейтлина $C_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ это множество $\{(x_{11}, x_{12}, x_{21}) \mid \lambda_1 \le x_{11} \le \lambda_2 \le x_{12} \le \lambda_3, x_{11} \le x_{21} \le x_{12}\}$. Найдите вершины, ребра и грани многогранника а) для $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$; б) для произвольных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$.