4. КОНИКИ И ДРУГИЕ КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ.

Задача 1. Постройте проективное преобразование плоскости, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ а) в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$; б) в параболу $x^2 - y = 0$; в) переводящее параболу в гиперболу. Куда перейдут при этом бесконечно удаленные точки? Какие точки станут бесконечно удаленными? Докажите, что аффинных преобразований с такими свойствами не существует.

Задача 2. а) Сколько общих точек могут иметь две проективные коники над $\mathbb{C}$? а над $\mathbb{R}$? Как ответ на этот вопрос согласуется с тем, что две окружности на плоскости имеют не более двух общих точек? б) Сколько касательных прямых к проективной конике ранга 3 проходит через данную точку a плоскости? в) Сколько общих касательных могут иметь две проективные коники ранга 3? Как это согласуется с тем, что две окружности на плоскости имеют не более двух общих касательных?

Задача 3. а) Докажите, что множество касательных к данной комплексной конике L ранга 3 является коникой $L*$ ранга 3 на двойственной проективной плоскости. б) Что представляет собой коника L^{**} (при стандартном отождествлении $(\mathbb{C}P^2)^{**}$ с $\mathbb{C}P^2$)? в) Докажите аналогичные утверждения

Задача 4. а) Постройте проективное преобразование плоскости, переводящее окружность $x^2+y^2 = 1$ в себя, а ее центр O — в заданную точку A внутри окружности. б) Докажите, что если A лежит вне окружности, то такого преобразования не существует. в) Докажите, что если на плоскости нарисована окружность, то нельзя построить ее центр, пользуясь только линейкой без делений. г) Пусть $\ell \subset \mathbb{R}P^2$ — прямая, не пересекающая окружность $x^2 + y^2 = 1$. Постройте проективное преобразование, переводящее окружность в себя, а ℓ — в бесконечно удаленную прямую.

Задача 5. а) Докажите теорему Паскаля: пусть $abcdef$ — шестиугольник, вписанный в конику (т.е. такой, что его вершины лежат на одной конике). Тогда точки $ab \cap de$, $bc \cap ef$ и $cd \cap fa$ лежат на одной прямой. б) Выведите из теоремы Паскаля теорему Паппа. в) Докажите теорему Брианшона: пусть $abcdef$ — шестиугольник, описанный около коники (т.е. такой, что его стороны ab, bc, cd, de, ef касаются коники). Тогда диагонали ad, be и cf пересекаются в одной точке. г) Выведите из общей теоремы Брианшона вырожденную.

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}P^2$ — гладкая кривая. Двойственной кривой $\gamma\check{}$ называется множество точек $\ell\check{}$, где $\ell \subset \mathbb{R}P^2$ — прямая, касающаяся кривой γ.

Задача 6. а) Докажите, что кривая, двойственная к окружности, — окружность. б) Докажите, что кривая, двойственная к плоской конике, — коника. Выпишите явно ее уравнение (если известно уравнение исходной коники). Что такое кривые, двойственные к параболе и гиперболе?

Задача 7. Какое утверждение получится, если в теореме Паскаля заменить все объекты (точки, прямые и конику) двойственными?

Задача 8. Пусть γ — гладкая плоская выпуклая кривая без самопересечений (не обязательно замкнутая). Докажите, что $\gamma\check{}$ — тоже гладкая выпуклая кривая, и $(\gamma\check{})\check{} = \gamma$.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $Q : V \to \mathbb{F}$ — квадратичная форма. Множество обратимых линейных преобразований $A : V \to V$, для которых $Q(Av) = Q(v)$ для всех $v \in V$, называется ортогональной группой (относительно Q) и обозначается $\mathrm{O}_Q(V)$.

Задача 9. а) Сколько орбит имеет группа $\mathrm{O}_Q(V)$ (в зависимости от V и Q), если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$? б) Тот же вопрос для $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.