5. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО: МОДЕЛИ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Обозначим $H \subset \mathbb{C}$ верхнюю полуплоскость, $\Omega \subset \mathbb{C}$ — единичный круг с моделью Пуанкаре, $D = \Omega$ — тот же самый круг, но с моделью Клейна, $L = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ — верхнюю полость двуполостного гиперболоида. Между этими множествами действуют стандартные отображения моделей геометрии Лобачевского, обозначаемые $f_{H\Omega}$ и т.п.

Задача 1. Найдите образ при отображении $f_{H\Omega}$ а) вертикальных лучей, б) горизонтальных прямых, в) окружностей, касающихся вещественной оси в точке 0. г) Докажите, что кривые, полученные в примерах 1а и 1б, пересекаются под прямым углом.

Задача 2. Найдите образ при отображении $f_{\Omega D}$ окружности радиуса $r < 1$ с центром в начале координат.

Задача 3. Напишите формулу для симметрий $S_\ell : H \to H$, где прямая ℓ это а) вертикальный луч $\Re(z) = c$, б) полуокружность $\mid z \mid = 1$.

Задача 4. а) Вычислите отображение $f_{H\Omega} \circ \varphi \circ f_{\Omega H} : \Omega \to \Omega$, где $\varphi : H \to H$ это б) параллельный перенос вдоль вещественной оси, в) растяжение с центром в начале координат, г) преобразования из задачи 3.

Задача 5. Вычислите отображение $f_{\Omega H} \circ \varphi \circ f_{H\Omega} : H \to H$, где $\varphi : \Omega \to \Omega$ — поворот на угол φ вокруг начала координат.

Задача 6. а) Докажите, что аффинное преобразование модели Пуанкаре в круге — либо дробно-линейное, коммутирующее с инверсией $z \mapsto 1/\overline{z}$, либо композиция такого преобразования и комплексного сопряжения. б) Докажите, что указанное преобразование равно либо $f(z) = \alpha \frac{z+p}{\overline{p}z+1}$, где $|\alpha| = 1$ и $|p| < 1$, либо $f(\overline{z})$ с таким же f.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ квадратичную форму $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ (так что $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y, z) = -1, z > 0\}$), и пусть B — ее поляризация.

Задача 7. Пусть $Q(v_1) = Q(v_2) = 0$, причем v_1, v_2 лежат в полупространстве $z > 0$. Докажите, что $B(v_1, v_2) \leq 0$, и равенство имеет место только если v_1 и v_2 пропорциональны.

Задача 8. а) Пусть $P_Q \subset \mathbb{R}P^2$ — проективная коника, соответствующая форме Q, и $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in P_Q$ и $m_1, m_2, m_3 \in P_Q$ — две тройки попарно различных точек этой коники. Докажите, что существует проективное преобразование $\mathbb{P}A : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ такое, что $\mathbb{P}A(\ell_i) = m_i$, $i = 1, 2, 3$ и $\mathbb{P}A(P_Q) = P_Q$. Единственно ли преобразование $\mathbb{P}A$? б) Пусть a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — две тройки попарно различных точек на единичной окружности $\omega \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$. Докажите, что существует и единственно проективное преобразование $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ такое, что $\varphi(\omega) = \omega$ и $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Задача 9. а) Докажите, что аффинное преобразование модели Клейна в круге плоскости Лобачевского можно продолжить до проективного преобразования $\mathbb{R}P^2$, сохраняющего круг D. б) Докажите, что аффинное преобразование модели Клейна в гиперболоиде плоскости Лобачевского является ограничением на гиперболоид линейного преобразования $\mathbb{R}^3$, сохраняющего форму Q.

Указание. Один из возможных планов доказательства: 8а $\Longrightarrow$ 8б $\Longrightarrow$ 9а $\Longrightarrow$ 9б.

Задача 10. Вычислите отображение $f_{HD} \circ \varphi \circ f_{DH} : D \to D$, где $\varphi : H \to H$ — те же отображения, что в задаче 4.

Задача 11. а) Как могут быть расположены неподвижные точки (включая точки на абсолюте и бесконечную точку на нем) аффинного преобразования I рода плоскости Лобачевского? б) Докажите, что преобразование II рода имеет две неподвижные точки на абсолюте. Всегда ли неподвижна прямая, их соединяющая?

Ответ (к пункту 11а)**.** Всего четыре варианта: одна точка вне абсолюта (эллиптическое движение), одна точка на абсолюте (параболическое движение), две точки на абсолюте (гиперболическое движение), все точки (тождественное преобразование).

Задача 12. Докажите, что композиция двух симметрий относительно прямых является эллиптическим движением, если прямые пересекаются, параболическим, если они параллельны, и гиперболическим, если прямые расходятся.

Задача 13. а) Докажите, что

1) любое эллиптическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в круге) евклидовому повороту;
2) любое параболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому сдвигу (вдоль границы);
3) любое гиперболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому растяжению.
4) любое движение II рода сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) преобразованию $z \to c\overline{z}$.

б) В каких случаях движения, относящиеся к различным пунктам этого списка, сопряжены друг другу?

Задача 14. Докажите, что множество преобразований в модели Пуанкаре, сохраняющих вертикальную прямую, проходящую через точку ноль, состоит из растяжений. Опишите множество преобразований, сохраняющих произвольную прямую.

Тем самым, можно определить модель Пуанкаре *прямой Лобачевского* как луч $x \in (0, \infty)$, аффинные преобразования которого суть растяжения $x \to cx$.

Задача 15. а) Докажите, что функция $d(x, y) = |\ln(x/y)|$ на луче обладает всеми свойствами расстояния (аксиома измерения и откладывания отрезка) и инвариантна относительно аффинных преобразований. Докажите, что если два отрезка имеют одинаковую длину, то они совмещаются аффинным преобразованием.
б) Докажите, что отображение $x \to \ln x$ определяет изометрию прямой Лобачевского и обычной евклидовой прямой (изометрия — отображение, сохраняющее расстояния). Во что при этом переходят аффинные преобразования?