Разложение Жордана в алгебраических группах.

Пусть $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ — поле.

Теорема. *Пусть G – алгебраическая группа. Тогда G изоморфна замкнутой подгруппе $GL(V)$ для некоторого конечномерного векторного пространства V.*

Зафиксируем конечномерное векторное пространство V.

Опр. *Элемент $x \in \operatorname{End} V$ называется* полупростым*, если минимальный многочлен элемента x имеет различные корни.*

Замечание. *В случае алгебраически замкнутого поля, полупростота эквивалентна тому, что x в некотором базисе записывается диагональной матрицей.*

Опр. *Элемент $x \in \operatorname{End}(V)$ называется* нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Опр. *Элемент $x \in \operatorname{End}(V)$ называется* унипотентным*, если $x = 1 + n$, для некоторого нильпотентного $n \in \operatorname{End}(V)$.*

Цель следующей задачи — показать, что любой элемент $x \in GL(V)$ обладает *разложением Жордана*: существуют единственные $x_s, x_u \in GL(V)$, такие что x_s – полупрост, x_u – унипотентен, $x = x_s x_u$ и $x_s x_u = x_u x_s$.

1. Пусть $x \in \operatorname{End}(V)$. Тогда
а) Существуют единственные элементы x_s, x_n, где x_s – полупрост, x_n – нильпотентен, $x = x_s + x_n, x_s x_n = x_n x_s$;
б) Существуют полиномы $p, q \in t\Bbbk[t]$, такие что $x_s = p(x), x_n = q(x)$;
в) Если $A \subset B \subset V$ – подпространства и $x(B) \subset A$, то $x_s(B) \subset A$ и $x_n(B) \subset A$;
г) Если $xy = yx$, то $(x+y)_s = x_s + y_s$ и $(x+y)_n = x_n + y_n$.

2. Выведите из задачи 1, что если $x \in GL(V)$, то
а) Существуют единственные $x_s, x_u \in GL(V)$, такие что x_s – полупрост, x_u – унипотентен, $x = x_s x_u$ и $x_s x_u = x_u x_s$;
б) Существуют полиномы $p \in \Bbbk[t], q \in t\Bbbk[t]$, такие что $x_s = p(x), x_n = q(x)$; в) Если $A \subset V$ – подпространство и $x(A) \subset A$, то $x_s(A) \subset A$ и $x_n(A) \subset A$;
г) Если $xy = yx$, то $(xy)_s = x_s y_s, (xy)_n = x_n y_n$.

Если H — произвольная подгруппа $GL(V)$, то она может не содержать полупростые и унипотентные части своих элементов.

3. Найдите подгруппу $GL(2)$, которая не содержит полупростые и унипотентные части своих элементов.

Тем не менее, если H – замкнутая подгруппа $GL(V)$, то она содержит полупростые и унипотентные части своих элементов. Для доказательства, вспомним критерий принадлежности элемента подгруппе в терминах левого действия на пространстве функций:

Лемма. *$x \in H$ тогда и только тогда, когда $\rho_x(I) \subset I$. Здесь $I = V(H) \subset \Bbbk[G]$ – идеал функций, зануляющийся на H, $\rho_x(f)(y) = f(yx)$ – правое действие группы G на пространстве функций $\Bbbk[G]$.*

Таким образом, если $x \in H$ и $x = x_s x_u$ – разложение Жордана в $GL(V)$, достаточно показать, что ρ_{x_s} и ρ_{x_u} оставляют идеал I инвариантным. Для того, чтобы это показать, нам потребуется понятие разложения Жордана для бесконечномерного пространства.

4. Пусть $x \in \operatorname{End}(V), U \subset V$ – инвариантное относительно x подпространство. Докажите, что ограничение полупростого (нильпотентного, унипотентного) оператора на U — полупростой (нильпотентный, унипотентный) оператор. Докажите, что индуцированное действие x на V/U так же определяет полупростой (унипотентный оператор).

Опр. *Пусть V – бесконечномерное векторное пространство, $x \in \operatorname{End}(V)$ и пусть $V = \bigcup_i V_i$, так что $\dim V_i < \infty$ и $x(V_i) \subset V_i$. Оператор x называется полупростым (унипотентным, нильпотентным), если его ограничение на любое инвариантное подпространство является полупростым (унипотентным, нильпотентным) оператором.*

Опр. *Пусть V – бесконечномерное векторное пространство, $x \in GL(V)$ и пусть $V = \bigcup_i V_i$, так что $\dim V_i < \infty$ и $x(V_i) \subset V_i$. Тогда для каждого V_i существует разложение Жордана. Из задачи 4 следует, что эти разложения определяют разложение оператора x в композицию двух коммутирующих операторов $x_s, x_u \in GL(V)$ (ограничения на $V_i \cap V_j$ — согласованы), x_s – полупрост, x_u – унипотентен. Будем называть разложение $x = x_s x_u$ разложение Жордана оператора x.*

Замечание. *Заметим, что из задачи 2в и определения следует, что любое (не обязательно конечномерное) подпространство, инвариантное относительно x, инвариантно относительно x_s и x_u.*

Из задачи 9 листка 2 следует ($\Bbbk[G]$ – объединение инвариантных конечномерных подпространств относительно всех $\rho_x, x \in G$), что для операторов $\rho_x, x \in G$ существует разложение Жордана. Нам требуется лишь установить, что оператор $\rho_{x_s}(\rho_{x_u})$ – полупрост (унипотентен).

5. Напомним, что $\Bbbk[GL(V)] = \Bbbk[E_{ij}, \det(E_{ij})], 1 \leq i, j \leq n$. Рассмотрим $\rho_x \in \operatorname{End}(\Bbbk[G])$. Докажите, что если ограничение ρ_x на подпространство $\Bbbk[E_{ij}]$ – полупросто (унипотентно), то и оператор ρ_x – полупрост (унипотентен).

6. Пусть V, W – конечномерные векторные пространства. Пусть $x \in GL(V), y \in GL(W)$. Докажите, что $(x \otimes y)_s = x_s \otimes y_s, (x \otimes y)_u = x_u \otimes y_u$.

Пусть $E = \operatorname{End}(V)$. Будем рассматривать $GL(V)$ как подмножество $\operatorname{End}(V)$. Отждествим $\Bbbk[E_{ij}]$ с $S(E^*)$ — симметрической алгеброй векторного пространства E^*. Для любого $x \in GL(V)$ определим $r_x : E \to E, y \to yx$. По эндоморфизму r_x построим $r_x^* : E^* \to E^*$. Заметим, что ρ_x — каноническое продолжение r_x^* на $S(E^*)$.

7. Докажите, что если $x \in \operatorname{End}(V)$ – полупрост (унипотентен), то $r_x \in \operatorname{End}(E)$ — полупрост (унипотентен).

8. Докажите, что если $x \in \operatorname{End}(V)$ — полупрост (унипотентен), то $x^* \in \operatorname{End}(V^*)$ — полупрост (унипотентен).

9. Используя задачи 4 и 6 покажите, что если $x \in End(V)$ — полупрост (унипотентен), то соответствующий оператор на $S(V)$ — полупрост (унипотентен).

Таким образом, из задач 5-9 следует, что если $x = x_s x_u$, то $\rho_x = \rho_{x_s}\rho_{x_u}$ — разложение Жордана оператора ρ_x.

Опр. *Пусть G – алгебраическая группа. Элемент $x \in G$ называется полупростым (унипотентным), если $\rho_{x_s}(\rho_{x_u})$ – полупрост (унипотентен).*

10. (Разложение Жордана в алгебраической группе) Пусть $x \in G$. Тогда существуют единственные $x_s, x_u \in GL(V)$, такие что x_s – полупрост, x_u – унипотентен, $x = x_s x_u$ и $x_s x_u = x_u x_s$.

11. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм алгебраических групп, $x = x_s x_u$ – разложение Жордана. Докажите, что $\varphi(x_s) = \varphi(x)_s, \varphi(x_u) = \varphi(x)_u$.

12. Докажите, что множество унипотентных элементов замкнуто в G. Приведите примеры, когда множество полупростых элементов а) замкнуто б) не замкнуто в G.

13. Рассмотрим $G = SL(n)$. Докажите, что полупростые (унипотентные) элементы не образуют подгруппы при $n \geqslant 2$.

14. Пусть $M \subset M(n)$ — подмножество коммутирующих матриц. Тогда существует $x \in GL(n)$, такой, что xMx^{-1} состоит из верхнетреугольных матриц.