Напоминание: представимость $H^m(\quad;G)$

В этом блоке задач излагается доказательство того, что когомологии $H^m(\quad;G)$ являются представимым функтором с представляющим объектом $K(G,m)$.

Задача 1.1. а) Пусть X и K суть топологические пространства. Введите структуру группы на множестве $[\Sigma X, K]$ аналогичную структре группы на гомотопических группах.
б) Постройте естественный изоморфизм $[\Sigma X, K] \cong [X, \Omega K]$ и покажите, что структура группы из предыдущего пункта при изоморфизме переходит в структуру группы, индуцированную умножением петель.
в) Докажите, что $[X, \Omega^2(K)]$ является абелевой группой.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория CW-комплексов с отмеченной точкой и непрерывными отображениями, сохраняющими отмеченную точку в качестве морфизмов. *Приведённой теорией когомологий* на категории $\mathcal{C}$ называется последовательность функторов h^n, $n \in \mathbb{Z}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию абелевых групп вместе с естественными изоморфизмами $h^n(X) \cong h^{n+1}(\Sigma X)$ для каждого CW-комплекса, причём для каждого h^n выполнены следующие аксиомы:

0. для гомотопных отображений $f \sim g\colon X \to Y$ индуцированные отрображения f^* и g^* равны;
1. для любого корасслоения $A \to X$ в $Ho\mathcal{C}$ последовательность $h^n(X/A) \to h^n(X) \to h^n(A)$ точна;
2. для включений $i_\alpha\colon X_\alpha \to \vee_\alpha X_\alpha$ отображение произведения $\prod_\alpha i^*_\alpha\colon \prod_\alpha h^n(X_\alpha) \to h^n(\vee_\alpha X_\alpha)$ является изоморфизмом.

Задача 1.2. Пусть K — топологическое пространство.
а) Пусть $f\colon Y \to X$ — отображение CW-комплексов. Постройте отображение $f^*\colon [X,K] \to [Y,K]$ и покажите, что оно зависит только от гомотопического класса отображения f.
б) Покажите, что $f^*\colon [X,\Omega K] \to [Y, \Omega K]$ является гомоморфизмом групп.
в) Покажите, что $[X/A, K] \to [X,K] \to [A,K]$ — точная последовательность множеств с отмнеченным элементом для любой CW-пары (X,A).
г) Покажите, что имеет место биекция $[\vee_\alpha X_\alpha, K] \cong \prod_\alpha [X_\alpha, K]$, и что биекция превращается в изоморфизм (абелевых) групп при замене K на ΩK ($\Omega^2 K$).
Задача 1.3. а) Докажите, что соответствие $h^n\colon X \mapsto \big[X, K(G,m)\big]$ является контрвариантным функтором, определяющим приведённую теорию когомологий.
б) Покажите, что имеют место естественные изоморфизмы $[X, K(G,n)] \cong \widetilde{H}^n(X;G)$.
Указание: воспользуйтесь теоремой единственности для когомологий.
в) Покажите, что этот изоморфизм задаётся соответствием $f \mapsto f^*(\alpha)$ для некоторого фиксированного класса $\alpha \in H^n(K(G,n),G)$.

Гомоморфизм Бокштейна

Пусть $l_1,\ldots,l_n$ — положительные целые числа взамно простые с фиксированным m. Определим *линзовое пространство* $L = L(l_1,\ldots,l_n)$ фактор пространство сферы $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ по действию группы $\mathbb{Z}/(m)$, порождённому поворотом $\tau(z_1,\ldots,z_n) = (e^{\frac{2\pi i l_1}{m}} z_1, \ldots, e^{\frac{2\pi i l_n}{m}} z_n)$.

Задача 1.4. Вычислите группы когомологий пространства L.
Указание-комментарий. Отметим, что в случае $m=2$ линзовое просранство L является по определению проективным пространством $\mathbb{R}P^{2n-1}$. Вспомните, как вычислялись группы (ко)гомологий для него. Самый простой способ вычислить (ко)гомологии линзового простраства — ввести удобную ($\mathbb{Z}/(m)$-инвариантную) клеточную структуру на сфере S^{2n-1}.
Покажите, что подмножества сферы $B_j^{2n-2} = \{(0,\ldots,0,e^{\frac{2\pi i j}{m}})\cos\theta + (z_1,\ldots,z_{n-1},0)\sin\theta \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $j = 1,\ldots,m$ и $B_j^{2n-1} = \{(0,\ldots,0,e^{\frac{2\pi i\varphi}{m}})\cos\theta + (z_1,\ldots,z_{n-1},0)\sin\theta \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, j \leqslant \varphi \leqslant j+1\}$, $j = 1,\ldots,m$ являются клетками размерности $2n-2$ и $2n-1$, соответственно. Покажите, что при действии группы $\mathbb{Z}/(m)$ клетки переставляются. Достройте клеточную клеточную структуру на сфере по индукции и используйте её для вычисления (ко)гомологий линзового пространства.

Гомоморфизмом Бокштейна называется связывающий гомоморфизм в длинной точной последовательности когомологий связанный с последовательностью коэффициентов $0 \to H \to G \to G/H \to 0$.

Нас будет в осном интересовать гомоморфизм Бокштейна $\beta\colon H^n\big(X;\mathbb{Z}/(m)\big) \to H^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}/(m)\big)$, связанный с последовательностью $0 \to \mathbb{Z}/(m) \to \mathbb{Z}/(m^2) \to \mathbb{Z}/(m) \to 0$, и гомоморфизм Бокштейна $\widetilde{\beta}\colon H^n(X;\mathbb{Z}/(m)) \to H^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}\big)$, связанный с последовательностью $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m) \to 0$.

Задача 1.5. Пусть $\rho\colon H^n(X;\mathbb{Z}) \to H^n\big(X;\mathbb{Z}/(m)\big)$ — гоморфизм, индуцированный канонической проекцией $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$. Покажите, что $\beta = \rho\widetilde{\beta}$.

Задача 1.6. Покажите, что гомоморфизм Бокштейна β удовлетворяет правилу Лейбница: $\beta(ab) = \beta(a)b + (-1)^{|a|}a\beta(b)$.

Задача 1.7. Пусть $K = K(\mathbb{Z}/(m),1)$. **а)** Используя задачу 1.6 и формулу универсальных коэффициентов, вычислите когомологии $H^*\big(K;\mathbb{Z}/(m)\big)$.

б) Докажите, что гомоморфизм $\beta\colon H^n\big(K;\mathbb{Z}/(m)\big) \to H^{n+1}\big(K;\mathbb{Z}/(m)\big)$ — изоморфизм для нечётных n и нулевой для чётных.

Задача 1.8. Используя задачи выше и структуру кольца когомологий $H^*\big(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}/(m)\big)$, опишите структуру кольца $H^*\big(K;\mathbb{Z}/(m)\big)$.

Стабильное расщепление пространств типа $K(\mathbb{Z}/(p^n);1)$

Напомним, что на лекции мы доказали, что любая надстройка над пространством $\mathbb{R}P^\infty \simeq K(\mathbb{Z}/(2),1)$ не расщепляется в букет из двух пространств с нетривиальными когомологиями. Следующая задача показывает, что для пространств типа $K(\mathbb{Z}/(p),1)$ при $p \geqslant 3$ уже первая надстройка расщепляется в букет.

Задача 1.9. Пусть $K = K(\mathbb{Z}/(p^n);1)$, и $r \in \big(\mathbb{Z}/(p)\big)^\times$ — образующая мультипликативной группы поля.

а) Постройте отображение $f\colon K \to K$, индуцирующее умножение на r в $\pi_1(K) \cong H_1(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(p^n)$.

б) Докажите, что отображение f, построенное в п.**а)** индуцирует умножение на r в $H^1\big(K;\mathbb{Z}/(p^n)\big)$ и $H^2\big(K;\mathbb{Z}/(p^n)\big)$. Указание: воспользуйтесь формулой универсальных коэффициентов.

в) Покажите, что $f^*\colon H^{2i-1}\big(K;\mathbb{Z}/(p^n)\big) \to H^{2i-1}\big(K;\mathbb{Z}/(p^n)\big)$ — умножение на r^i. Докажите то же утверждение для групп $H_{2i}\big(K;\mathbb{Z}/(p^n)\big)$.

Для фиксированного $j \geqslant 0$ рассмотрим $h_j = \Sigma f - r^j\mathbf{1}\colon \Sigma K \to \Sigma K$.

г) Покажите, что $(h_j)_*\colon \widetilde{H}_{2i}(K;\mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_{2i}(K;\mathbb{Z})$ имеет нетривиальное ядро тогда и только тогда, когда $i \equiv j \mod p-1$.

д) Выведите из этого, что композиция $m_i = h_1 \circ \ldots \circ \widehat{h_i} \circ \ldots \circ h_{p-1}$ индуцирует изоморфизм на $\widetilde{H}_*(K;\mathbb{Z})$ для $* \equiv 2i \mod 2p-2$.

Пусть X_i — телескоп отображений $\Sigma K \xrightarrow{m_i} \Sigma K \xrightarrow{m_i} \ldots$

е) Покажите, что включение $\Sigma K \to X_i$ индуцирует изоморфизм на гомологиях в размерностях сравнимых с $2i \mod 2p-2$, и что $\widetilde{H}_*(X_i;\mathbb{Z}) = 0$ в остальных размерностях.

ж) Таким образом, имеет место расщепление $\Sigma K \simeq X_1 \vee \ldots \vee X_{p-1}$. Указание: воспользуйтесь теоремой Уайтхеда.