Когомологические операции

Задача 2.1. Найдите все когомологические операции **а)** $H^1(X;\mathbb{Z}) \to H^n(X;\mathbb{Z})$; **б)** $H^2(X;\mathbb{Z}) \to H^n(X;\mathbb{Z})$; **в)** $H^1(X;\mathbb{Z}/(p)) \to H^n(X;\mathbb{Z}/(p))$ для простого числа p.

Соотношения Адема

Напомним, что квадраты и степени Стинрода удовлетворяют следующему набору соотношений, называемых *соотношениями Адема*:

$$Sq^a Sq^b = \sum_j \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j, \qquad \text{если } a < 2b;$$

$$P^a P^b = \sum_j (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j, \qquad \text{если } a < pb;$$

$$P^a \beta P^b = \sum_j (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta P^{a+b-j} \beta P^j - \sum_j (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j, \qquad \text{если } a \leqslant pb.$$

Алгебра Стинрода $\mathscr{A}_p$ — фактор свободной алгебры над $\mathbb{Z}/(p)$, порождённой переменными $P^1, P^2, \ldots$ и β, по двустороннему идеалу порождённому соотношениями Адема и соотношением $\beta^2 = 0$. (При $p = 2$ образующими являются только Sq^i, а соотношения порождают только соотношения Адема.)

Задача 2.2. Покажите, что элемент P^i (соотв. Sq^i) алгебры Стинрода $\mathscr{A}_p$ (соотв. $\mathscr{A}_2$) разложим в точности тогда, когда $i = p^k$ (соотв. 2^k) для некоторого k.

Указание. Докажите и воспользуйтесь теоремой Люка: $\binom{b}{a} \equiv \prod_{i=0}^{m} \binom{b_i}{a_i} \mod p$, где $a = \sum_{i=0}^{m} a_i p^i$ и $b = \sum_{i=0}^{m} b_i p^i$ суть p-ичные записи чисел.

Применение: инвариант Хопфа

Рассмотрим отображение $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ для $n > 1$. В этом случае, целочисленные когомологии конуса C_f нетривиальны только в размерностях n и $2n$. Зафиксируем образующие $\sigma \in H^n(C_f)$ и $\tau \in H^{2n}(C_f)$. *Инвариантом Хопфа* $H(f)$ называется целое число, определяемое равенством $\sigma^2 = H(f)\tau$.

Задача 2.3. а) Вычислите $H(f)$ для чётных n.

б) Постройте отображение с инвариантом Хопфа равным 1 в случае $n = 2{,}4$ и 8.

Для двух сфероидов $[f] \in \pi_p(X)$ и $[g] \in \pi_q(X)$ определим их *произведение* (или *скобку*) *Уайтхеда* $[f,g]_w$ как композицию $S^{p+q-1} \xrightarrow{w} S^p \vee S^q \xrightarrow{f \vee g} X$, где w — отображение приклеивания $(p+q)$-мерной клетки произведения $S^p \times S^q$ к $S^p \vee S^q$.

Задача 2.4. а) Как устроен гомоморфизм $F^*\colon H^*(S^n) \to H(S^n \vee S^n)$ индуцированный отображением складывания.

б) Вычислите квадрат $2n$-мерной образущей в $H^*(C_{[\iota_{2n},\iota_{2n}]_w})$, где $\iota_{2n}\colon S^{2n} \to S^{2n}$ — класс тождественного отображения.

Указание. Воспользуйтесь коммутативностью диаграммы

$$\begin{tikzcd}
e^{2n} \arrow[r, phantom, "\supset"] & S^{4n-1} \arrow[r, "w"] & S^{2n} \vee S^{2n} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & S^{2n} \arrow[d] \\
 & S^{2n} \times S^{2n} \arrow[r, equal] & C_w \arrow[r, "\widetilde{F}"] & C_{[\iota_{2n},\iota_{2n}]_w}
\end{tikzcd}$$

в) Покажите, что отображение $H\colon \pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \mathbb{Z}$ является гоморфизмом.

Следствие. Группа $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ содержит бесконечную циклическую подгруппу для любого натурального $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. (Чуть позже мы покажем, что гомотопические группы конечно порождены, а потому бесконечная циклическая группа отщепляется прямым слагаемым.)

Задача 2.5. а) Покажите, что если $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ — отображение с инвариантом Хопфа $H(f) = 1$, то n — степень двойки.

Указание. Воспользуйтесь задачей 2.2.

б) Покажите, что если на $\mathbb{R}^n$ существует структура алгебры с делением, то в группе $\pi_{2n-1}(S^n)$ существует элемент с инвариантом Хопфа равным единице.

Другое

Задача 2.6. Покажите, что пространства $(S^1 \times \mathbb{C}P^\infty)/(S^1 \times \{x_0\})$ и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ не гомотопически эквивалентны.