Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

АЛГЕБРА, ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Лекция 1 (14 февраля 2019):

Модули и векторные пространства

1.0. Категории модулей над кольцами

В первом семестре мы работали с категориями "чистых" алгебраических объектов, таких, как группы, кольца, ... – это были множества, снабжённые одной или несколькими операциями, как правило, бинарными. В этом семестре нам встретятся более сложные конструкции: по чистым объектам мы будем строить новые категории, которые будут и интересовать нас сами по себе, и служить средством изучения чистых объектов.

Начнём с одной из таких конструкций.

1.0.0. Определения. Для произвольного кольца $R \in\in \mathcal{RING}$ введём категорию *R-модулей*

$$R - \mathcal{MOD} := \{\{(M, \alpha) \mid\mid M \in\in (AB), \alpha : R \longrightarrow \mathrm{End}(M)\}\}.$$

Здесь подразумевается, что α – морфизм колец (в первом семестре мы наделили множество эндоморфизмов любой абелевой группы структурой кольца).

Для $r \in R, m \in M$ запись $\alpha(r)(m) \in M$ громоздка и плохо воспринимается, так что вместо неё мы будем использовать запись

$$\alpha(r)(m) =: r \cdot_\alpha m.$$

Морфизм α обычно ясен из контекста, а часто обозначение для него даже не вводится, и остаётся обозначение $r \cdot_\alpha m =: r \cdot m$.

Альтернативное определение R-модуля: это – абелева группа M, снабжённая отображением

$$R \times M \longrightarrow M : (r, m) \mapsto r \cdot m,$$

удовлетворяющая некоторым аксиомам (раз в жизни выпишите их!).

Кратко и без *абстрактной чепухи* говоря, модуль над кольцом – абелева группа, на которой определено *действие* кольца. Следует только иметь в виду, что в этой конструкции кольцо психологически – "более постоянный" объект, чем абелева группа.

Остаётся определить морфизмы категории $R - \mathcal{MOD}$. Для $(M_1, \alpha_1), (M_2, \alpha_2) \in\in R - \mathcal{MOD}$

$$\mathrm{Mor}_{R-\mathcal{MOD}}\big((M_1, \alpha_1), (M_2, \alpha_2)\big) :=$$

$$:= \{f : M_1 \to M_2 \mid \forall r \in R, \forall m \in M_1 \big[f(r \cdot_{\alpha_1} m) = r \cdot_{\alpha_2} f(m)\big].$$

Здесь подразумевается, что f – морфизм абелевых групп.

Итак, морфизмы в категории модулей над данным кольцом – это морфизмы абелевых групп, *уважающие* действие кольца на них.

1.0.1. Простейшие категорные свойства $R - \mathcal{MOD}$. В категории есть очевидный начальный, он же конечный объект – нулевой модуль, одноэлементная группа

$$\mathbf{0} := \{0\}$$

с единственным возможным действием (любого) кольца.

Как и в $\mathcal{AB}$, в категории $R - \mathcal{MOD}$ есть и прямые произведения, и прямые суммы, причём они изоморфны между собой. Действительно, при $M, N \in\in R - \mathcal{MOD}$ на группе $M \times N$ определяется действие ($r \in R$)

$$r \cdot (m, n) := (r \cdot m, r \cdot n).$$

Это – и произведение, и сумма, поскольку определены и морфизмы

$$M \times N \longrightarrow M : (m, n) \mapsto m, M \times N \longrightarrow N : (m, n) \mapsto n,$$

и морфизмы

$$M \longrightarrow M \times N : m \mapsto (m, 0), N \longrightarrow M \times N : m \mapsto (0, n),$$

обладающие требуемыми свойствами.

Из двух обозначений $M \oplus N$ и $M \times N$ мы выбираем обозначение суммы, поскольку (тензорное) произведение $\otimes$ вскоре появится[1], и пара знаков "операций" $(\oplus, \otimes)$ смотрится лучше, чем пара $(\times, \otimes)$.

1.0.2. Модули и идеалы. Напомним, что *идеалом* кольца R называется подмножество $\mathfrak{a} \subseteq R$, обладающее свойствами

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$$

и

$$R\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$$

(на самом деле оба включения должны обращаться в равенство). Очевидно, идеалы $\mathfrak{a} \triangleleft R$ – это R-модули, содержащиеся в R.

Таким образом, изучение R-модулей – это обобщение теории идеалов в R. Однако за счёт того, что мы "извлекли" модули из колец, на их категории появились новые операции, из которых важнейшая – прямая сумма $\oplus$.

1.0.3. Абелевы группы как $\mathbb{Z}$-модули. В случае $R = \mathbb{Z}$ обнаруживается "совпадение" категорий:

$$\mathbb{Z} - \mathcal{MOD} = \mathcal{AB}.$$

Действительно, аксиомы окажутся идентичными, если для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $a \in A \in\in \mathcal{AB}$ положить

$$n \cdot a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ слагаемых}}$$

(при $n = 0$ сумма по определению равна 0_A), а для $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ положить $n \cdot a := -\big((-n) \cdot a\big)$.

Общая структурная теорема о конечнопорождённых модулях над кольцами главных идеалов даст нам в качестве частного случая *классификацию конечнопорождённых абелевых групп.*

[1] оно, разумеется, не будет *категорным* произведением, поскольку последнее уже определено и единственно

1.0.2*. Интуитивный смысл R–модулей. Если про кольцо R думать по Гротендику как про *кольцо "функций" на "пространстве"* X, то с модулем M следует связать картину *семейства векторных пространств* над X; тогда M окажется абелевой группой *сечений* этого семейства, причём M будет снабжена структурой "умножения"на элементы $r \in R$.

Хороший класс примеров доставляется понятием *касательного расслоения* над гладким многообразием X; в этом случае модуль M интерпретируется как абелева группа *векторных полей* на X, которые можно умножать (слева...) на гладкие функции – элементы кольца R.

Различные интуитивно ясные свойства семейства отражаются в алгебраических свойствах модуля. Например, требование отсутствие резких скачков в слоях семейства приводит к понятию *плоского* модуля.

С любым идеалом в кольце R связывается *подпространство* пространства X. Соответствующее семейство векторных пространств *сосредоточено* на этом подпространстве: вне его векторные пространства обращаются в нуль.

Подробности см. в [**Манин2012**].

1.1. Образующие; ранг модуля.

1.1.0. Подмодуль, порождённый подмножеством. Пусть $E \subseteq M$ – *подмножество* модуля. Обозначим

$$\langle E\rangle := \bigcap_{E\subseteq N\subseteq M} N.$$

Здесь подразумевается пересечение по всем *подмодулям*, содержащим *множество* E. Иногда это пересечение обозначают словами *наименьший подмодуль модуля M, содержащий множество E.*

Конструктивно

$$\langle E\rangle := \{r_1e_1 + \cdots + r_ne_n \mid n \in \mathbb{N}, r_1, \ldots, r_n \in R, e_1, \ldots, e_n \in E\};$$

здесь подразумевается, что "пустая"сумма, то есть при $n = 0$, равна 0_M.

Подмножество $E \subseteq M$ называется *порождающим*, если $\langle E\rangle = M$.

1.1.1. Определение ранга модуля. Неформально ранг модуля – это *наименьшая возможная мощность порождающего множества.* В нашем курсе точный смысл этому определению будет придан лишь для класса модулей, которому посвящён следующий подраздел.

Элементы порождающего множества обычно называются *образующими* модуля.

1.1.2. Конечнопорождённые модули. R-модуль M называется *конечнопорождённым*, если в нём существует конечное порождающее множество, то есть найдётся такое $n \in \mathbb{N}$ и такие $m_1, \ldots, m_n \in M$, что

$$M = Rm_1 + \cdots + Rm_n.$$

Ранг модуля M – это наименьшее n, при котором такое представление возможно.

Классификация бесконечно-порождённых модулей (без дополнительных структур) – задача безнадёжная, и мы ей заниматься не будем. Наоборот, классификация конечнопорождённых модулей над некоторыми кольцами вполне реальна, и мы будем заниматься ей по возрастающей сложности, начиная с полей.

1.2. Свободные модули

1.2.0. Определение. Пусть $I \in\in \mathcal{SET}$ – произвольное множество. Множество отображений

$$R^I := \{f : I \longrightarrow R : i \mapsto f_i\}$$

наделяется очевидной структурой R-модуля: для $f, f' \in R^I$

$$(f + f')_i := f_i + f'_i$$

и для $f \in R^I, r \in R$

$$(r \cdot f)_i := r \cdot f_i.$$

Такие модули и называются *свободными*; чуть точнее, модуль $F \in\in R - \mathcal{MOD}$ называется *свободным*, если для некоторого множества $I \in\in \mathcal{SET}$ имеет место изоморфизм $F \simeq_{R-\mathcal{MOD}} R^I$.

1.2.1. Универсальное свойство. Пусть снова $I \in\in \mathcal{SET}$ – произвольное множество, а $M \in\in R - \mathcal{MOD}$ – произвольный модуль (на этот раз, в отличие от предыдущего подраздела, не предполагающийся свободным).

Для произвольного отображения $m : I \to M$ существует и единственен морфизм модулей $\alpha : R^I \to M$, такой, что для любого $f : I \to R$

$$m = \alpha \circ f.$$

Эта формулировка может показаться несколько оторванной от повседневных представлений. Раскроем её в случае конечного множества "индексов" $I = \{1, \ldots, n\}$, когда в модуле R^I можно выделить элементы $e_j : i \mapsto \delta^i_j$ и отождествить R^I с множеством наборов $f = (f_1, \ldots, f_n)$ элементов кольца R с помощью взаимно однозначного соответствия $f \leftrightarrow f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$. Тогда универсальное свойство констатирует тот очевидный факт, что произвольное отображение конечных множеств $e_j \mapsto m_j$ продолжается до морфизма модулей $F \to M$.

1.2.2. Свободные резольвенты. Свободные модули представляют собой наиболее удобный и лёгкий в обращении класс модулей. Однако не все модули свободны; например, не свободен модуль $\mathsf{C}_2 \in\in \mathbb{Z} - \mathcal{MOD}$. Свободная резольвента произвольного модуля, однако, позволяет в определённом смысле выразить этот модуль через свободные.

Пусть M – произвольный произвольный R-модуль; выберем в нем множество порождающих $\{m_i \mid i \in I\}$. Для совместимости с использованными выше обозначениями удобно считать, что I–"постороннее" множество индексов, а $i \mapsto m_i$ – отображение. Чтобы не ссылаться на теоремы о существовании порождающих множеств, можно даже допустить, что $\{m_i \mid i \in I\} = M$.

Введём свободный модуль $F_1 := R^I$ Согласно универсальному свойству, существует эпиморфизм $\pi_1 : F_1 \to M$ (его конструкция нам не важна, но, распространяя обозначение из предыдущего подраздела с конечнопорождённого случая на общий, можно считать, что $\pi_1 : e_i \mapsto m_i$ для всех $i \in I$).

Нет причин полагать, что π_1 – изоморфизм; это выполнялось бы, если бы модуль M был свободен. В общем же случае положим $M_1 := \ker \pi_1$ и повторим операцию, получая свободный модуль F_2 и эпиморфизм $\pi_2 : F_2 \to M_2$. Итерируя эти действия, получим точную последовательность модулей

$$\cdots \xrightarrow{\pi_4} F_3 \xrightarrow{\pi_3} F_2 \xrightarrow{\pi_2} F_1 \xrightarrow{\pi_1} M;$$

Вообще говоря, причин обрываться этой последовательности нет. Она и называется *свободной резольвентой* модуля M.

Подчеркнём неоднозначность наших действий на каждом шагу. Тем не менее, свободная резольвента модуля определена однозначно с точностью до некоторого отношения эквивалентности (*гомотопии*), которое будет введено в последующих лекциях.

Пока ограничимся классом примеров. Пусть $R = \mathbb{Z}$ и M– *конечная* абелева группа. Тогда можно считать, что $F_1 = \mathbb{Z}^r$ – свободная конечнопорождённая абелева группа. Поскольку любая подгруппа свободной абелевой группы свободна, вся наша свободная резольвента имеет вид

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker \pi \hookrightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\pi} M.$$

Таким образом, длина (ненулевой части) свободной резольвенты имеет некоторое отношение к "степени несвободы" модуля. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в дальнейших лекциях.

1.3. Аддитивные категории

Мы сейчас лишь упомянем свойство категорий $R - \mathcal{MOD}$, которое относит их к некоторому важному классу категорий.

Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если для любых её объектов $A, B \in\in \mathcal{A}$ на множестве $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ имеется структура *абелевой группы*, причём для любых $A, B, C \in\in \mathcal{A}$ композиция

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

билинейна. Здесь использовано понятие билинейного ОТОБРАЖЕНИЯ (не морфизма) $\beta : X \times Y \to Z$, связывающего тройку абелевых групп X, Y, Z; билинейность такого отображения означает, что при любом $x \in X$ отображение $Y \to Z : y \mapsto \beta(x, y)$ является морфизмом групп, и то же верно при любом $y \in Y$ для отображения $X \to Z : x \mapsto \beta(x, y)$.

Среди многих источников, посвященных аддитивным категориям, отметим подробное изложение в классической работе [**Freyd1964**].

Список литературы

[Freyd1964] Peter Freyd, *Abelian categories.* Harper and Row, New York, 1964.

[Манин2012] Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы.* М., Издательство МЦНМО, 2012.