Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

1

1.1. Пусть $R \in\in \mathcal{RING}$ и $M \in\in R - \mathcal{MOD}$. Для всякого ли *подмодуля* $M_1 \subseteq M$ найдётся такой подмодуль $M_2 \subseteq M$, что $M \simeq M_1 \oplus M_2$?

1.2. Обозначим для поля $\Bbbk$ через $\Bbbk[x]_{\leq d}$ векторное пространство многочленов степени не выше d. Существует ли в пространстве $\mathbb{R}_{\leq 100}$ такой базис из многочленов $f_0, \dots f_{100}$, что при любых $i, j \in \{0, \dots, 100\}$ из $i \neq j$ следует $\int_{-1}^{1} f_i(x) f_j(x) \mathrm{d}x = 0$? **Подсказка:** такие многочлены называются *ортогональными*.

1.3. Пусть m, n – чётные целые числа. При каком условии $\langle\{m, n\}\rangle = 2\mathbb{Z}$?

1.4. Составьте таблицу рангов рассматриваемых как $\mathbb{Z}$-модули абелевых групп порядка ≤ 10.

1.5. Приведите пример несвободного модуля.

1.6. Составьте наугад систему двух линейных однородных уравнений с 4 неизвестными. Найдите базис пространства решений этой системы.

1.7. Рассмотрите над полем $\mathbb{Q}$ пространство $\mathbf{Fib}(\mathbb{Q})$ последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : n \mapsto x_n$, удовлетворяющих *уравнению Фибоначчи*

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Существует ли базис этого пространства, состоящий из геометрических прогрессий? Существует ли такой базис в *большем* пространстве $\mathbf{Fib}(\mathbb{K})$ для какого-либо расширения $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$?

Последовательностью *чисел Фибоначчи* называется элемент $\phi \in \mathbf{Fib}(\mathbb{Q})$, удовлетворяющий $\phi_0 = \phi_1 = 1$. Сколько десятичных знаков в числе ϕ_{2019}? А в ϕ_{-2019}? **Указание:** воспользуйтесь базисом из геометрических прогрессий в подходящем пространстве $\mathbf{Fib}(\mathbb{K})$.

1.8. Найдите <u>все</u> решения *уравнения Пелля*

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

с $x, y \in \mathbb{N}$; пронумеруйте эти решения так, чтобы $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$. Сформулируйте полученный результат в терминах модулей над кольцом алгебраических чисел. Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Вычислите с помощью решений уравнения Пелля 6 десятичных знаков $\sqrt{2}$.

14 февраля, *Г.Б. Шабат*