

2

2.1*. Приведите примеры дополняемых и недополняемых подпространств в вещественном векторном пространстве непрерывных вещественнозначных функций на отрезке.

2.2. Для каких $a, b, c \in \mathbb{Q}$ существует базис в пространстве решений разностного уравнения $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + cx_{n-3}$, состоящий из геометрических прогрессий? "Неизвестные" в этом уравнении – последовательности $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} : n \mapsto x_n$.

2.3. В пространстве кватернионов \mathbb{H} , рассматриваемом как 4-мерное пространство над \mathbb{H} , выпишите матрицы умножений на i, j, k .

2.4. В трёхмерном вещественном пространстве $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ выпишите матрицу *векторного* умножения на произвольный элемент. Определите разными способами ранг этой матрицы.

2.5. Установите связь между формулами, полученными в двух предыдущих задачах, и объясните её.

2.6. Что можно сказать о следе эндоморфизма двумерного векторного пространства, являющегося инволюцией?

2.7. Вычислите след оператора $x \frac{d}{dx}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ многочленов степени, не превосходящей n . Воспользуйтесь при этом по крайней мере двумя базисами указанного пространства.

2.8. Для произвольного поля \mathbb{k} рассмотрите пространства многочленов ограниченной степени $\mathbb{k}[x]_{\leq m}$ и $\mathbb{k}[y]_{\leq n}$ (см. предыдущую задачу). Дайте пространству $\mathbb{k}[x]_{\leq m} \otimes \mathbb{k}[y]_{\leq n}$ интерпретацию в терминах многочленов от двух переменных. Свяжите эту интерпретацию с каноническим изоморфизмом $V \otimes W \cong V^* \circlearrowleft W$.

2.9. Для наугад взятой 2×2 матрицы M с коэффициентами из поля \mathbb{k} рассмотрите идеал в кольце многочленов $f \in \mathbb{k}[x]$, что $f(M) = 0$. Найдите образующую этого идеала.

21 февраля, Г.Б. Шабат