Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

3

3.1. Рассмотрите подмодуль $M = \mathbb{Z}(a_1, b_1) + \mathbb{Z}(a_2, b_2)$ модуля $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. В каких случаях индекс подмодуля M в модуле $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ конечен? В соответствующих предположениях выразите этот индекс через a_1, b_1, a_2, b_2.

3.2. Ответьте на вопросы задачи **3.1.** для подмодуля $M = \mathbb{Z}(a_1, b_1) + \mathbb{Z}(a_2, b_2) + \mathbb{Z}(a_3, b_3)$ модуля $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3.3. Пусть $\Bbbk$ – поле, и $R = \Bbbk[x, y]$. Проверьте, что подмодуль свободного R-модуля R, состоящий из многочленов с нулевым свободным членом, не свободен.

3.4. Постройте свободные резольвенты минимальной возможной длины для всех идеалов кольца гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

3.5*. Постройте свободные резольвенты минимальной возможной длины для всех идеалов кольца эйзенштейновых целых чисел $\frac{\mathbb{Z}[\omega]}{\omega^2+\omega+1}$.

3.6.** Постройте свободные резольвенты минимальной возможной длины для всех идеалов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

3.7.** Постройте свободные резольвенты минимальной возможной длины для всех идеалов кольца $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^3+y^3-1)\mathbb{C}[x,y]}$.

3.8. Рассмотрите кольцо $R := \frac{\mathbb{Z}[T]}{\mathbb{Z}[T](T^2-1)}$ и введите элемент $t \in R$ с помощью морфизма $\mathbb{Z}[T] \to R : T \mapsto t$. Рассмотрите R-модуль $M := \frac{R}{R(t-1)}$.

(а) Докажите, что M изоморфен бесконечной циклической группе, на которой t действует тривиально.

(б) Проверьте, что

$$\ldots R \xrightarrow{t-1} R \xrightarrow{t+1} R \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0$$

– бесконечная свободная резольвента модуля M.

3.9*. В обозначениях предыдущей задачи докажите, что R-модуль M не имеет свободных резольвент конечной длины – или хотя бы длин 1,2, 3, ...

7 марта, *Г.Б. Шабат*