Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

4

Введём для $n \in \mathbb{N}$ *стандартный симплекс*

$$\Delta^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

и обозначим $v_0, \dots, v_n$ его *вершины*: все координаты каждой точки $v_j \in \mathbb{R}^{n+1}$, кроме j-й, равны 0, тогда как j-я равна 1. Общим $n-$*симплексом* в пространстве $\mathbb{R}^N$ называется выпуклая оболочка $n+1$ точки, если она содержит n-мерный шар.

Отметим в *призме* $\Delta^n \times [0,1]$ для $k \in \{0, \dots, n\}$ *вершины* призмы $u_k := (v_k, 0)$ и $w_k := (v_k, 1)$.

Рассмотрим для $i \in \{-1, 0, \dots, n\}$ функцию

$$\varphi_i : \Delta^n \longrightarrow [0,1] : (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_{i+1} + \dots + x_n$$

и обозначим $\Gamma_i \subset \Delta^n \times [0,1]$ её график.

4.1. Проверьте, что каждая Γ_i представляет собой выпуклую оболочку точек $u_0, \dots, u_i, w_{i+1}, \dots, w_n$ и является n-симплексом.
4.2. Докажите, что для всех $i \in \{0, \dots, n\}$ область *между* Γ_{i-1} и Γ_i, то есть множество

$$\mathcal{S}_{n,i} := \{(x_0, \dots, x_n, t) \mid \varphi_i(x_0, \dots, x_n) \leq t \leq \varphi_{i-1}(x_0, \dots, x_n)\}$$

представляет собой $(n+1)$-симплекс.
4.3. Докажите, что имеет место теоретико-множественное равенство

$$\Delta^n \times [0,1] = \mathcal{S}_{n,0} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{S}_{n,n}$$

и что оно задаёт призму как объединение симплексов, причём соседние $(n+1)$-симплексы пересекаются по n-симплексам.

4.4. Пусть $F : X \times [0,1] \to Y$ – гомотопия между непрерывными отображениями топологических пространств $f_0, f_1 : X \to Y$, то есть $F_{X \times \{0\}} = f_0$ и $F_{X \times \{1\}} = f_1$. С помощью конструкций предыдущих трёх задач постройте для всех $n \in \mathbb{N}$ *призматические операторы* $\Pi_n : \mathrm{C}_n(X; \mathbb{Z}) \to \mathrm{C}_{n+1}(Y, \mathbb{Z})$, удовлетворяющие равенствам

$$f_{1,n*} - f_{0,n*} = \partial \circ \Pi_n + \Pi_{n-1} \circ \partial,$$

где для непрерывного отображения $f : X \to Y$ используется обозначение $f_{n*} : \mathrm{C}_n(X; \mathbb{Z}) \to \mathrm{C}_n(Y, \mathbb{Z})$

14 марта, *Г.Б. Шабат*