Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

5

5.1*. Докажите, что алгоритмическая разрешимость проблемы существования *рациональных* решений системы целочисленных полиномиальных уравнений равносильна алгоритмической разрешимости проблемы существования *целочисленных* решений системы целочисленных *однородных* полиномиальных уравнений. [Замечание. На сегодняшний день (28 марта 2019) неизвестно, имеют ли место эти алгоритмические разрешимости.]

5.2. Постройте таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_8$ из восьми элементов.

5.3. Постройте таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_9$ из девяти элементов.

5.4*. Пусть $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ – квадратичное расширение полей, то есть $\dim_{\Bbbk} \mathbb{K} = 2$. Обозначим для $x \in \mathbb{K}$ отображение умножения на x через $\mathrm{M}_x : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : y \mapsto xy$, и будем рассматривать это отображение как линейный эндоморфизм пространства $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$. Введём на $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *квадратичную форму* $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{M}_{xy})$. Всегда ли эта форма невырождена?

5.5. Всегда ли композиция нормальных расширений нормальна? [**Совет.** Рассмотрите тройку полей $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$]

5.6. Для $a, b, c \in \mathbb{Z}$ рассмотрите многочлен $f = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ и установите бесконечность множество простых чисел p, для которых редукция $\underline{f} := f \mod p \in \mathbb{F}_p[x]$ разлагается на линейные множители.

5.7. Сколько точек лежит на "окружности", заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, над полем $\mathbf{F}_p$?
5.8. Сколько точек лежит на грассманиане k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над полем $\mathbf{F}_q$?

5.9*. При каких простых p и натуральных положительных n многочлен $x^p - x - 1$ не разлагается на нетривиальные множители в кольце $\mathbb{F}_2[x]$?
5.10. При каких $n \in \mathbb{N}$ многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_{p^n}[x]$?

5.11. Существует ли 100 разных полей $\mathbb{K}$ таких, что

$$\mathbb{F}_7(x^7, y^7) \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{F}_7(x, y)?$$

28 марта, *Г.Б. Шабат*