Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

6

6.1. Пусть характеристика поля $\Bbbk$ отлична от 2, и многочлен $f \in \Bbbk[x[$ неприводим. Докажите, что дискриминант $D(f)$ является квадратом в поле $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда группа Галуа $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}\frac{\Bbbk[x]}{\langle f\rangle}$ содержит лишь чётные перестановки корней многочлена f. Совет. Начните с кубического многочлена.

6.2. Вычислив соответствующие группы Галуа, решите уравнения:
(a) $x^3 - 3x + 1 = 0$;
(b) $x^3 + 2x + 1 = 0$;
(c) $x^4 + 1 = 0$;
(d) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;
(e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
(f) $x^4 + 2x^2 + x + 3 = 0$;
(g) $x^4 + x^2 + x + 1 = 0$.
Подсказка. Примеры заимствованы из двухтомника А.Л. Городенцева, и там же можно найти наброски решений.

6.3. Пусть $\mathbb{K} := \frac{\mathbb{Q}[\sqrt{-23}][x]}{\langle x^3-x-1\rangle}$. Найдите группу Галуа $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}[\sqrt{-23}]}\mathbb{K}$.

6.4. Найдите все положительные натуральные n, для которых группа $\sqrt[n]{1} \subset \mathbb{C}^{\times}$ порождена квадратичной иррациональностью.

6.5. Перечислите корни из единицы в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.

6.6. Выразите $\sqrt{13}$ через $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{13}} \in \mathbb{C}$.

6.7. Докажите, что если простое число p удовлетворяет сравнению $p \equiv 3(\mathrm{mod}4)$, то $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] \subset \mathbb{Q}\big[\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{4p}}\big]$.

6.8. Найдите полиномиальное уравнение с целыми коэффициентами, которому удовлетворяют диагонали правильного 5-угольника, вписанного в единичную окружность.

6.9*. Вычислите косинусы двугранных углов правильного икосаэдра.

6.10. Приведите пример вещественного алгебраического числа $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \bigcap \mathbb{R}$, не допускающего выражения через натуральные числа с помощью алгебраических операций и извлечения корней.

18 апреля, *Г.Б. Шабат*