Ряды

1◇1. Пусть $\{a_k\}$ — монотонно убывающая к нулю последовательность вещественных чисел. Покажите, что ряд $\sum a_k$ сходится если и только если сходится ряд $\sum 2^k a_{2^k}$.

1◇2. Существует ли такая положительная последовательность $\{a_n\}$ для которой одновременно сходятся ряды $\sum a_n$ и $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$?

1◇3. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

1◇4. Покажите, что если ряды вещественных чисел $\sum a_k^2$ и $\sum b_k^2$ сходятся, то ряд $\sum a_k b_k$ сходится абсолютно.

1◇5. Найдите сумму рядов **а)** $\sum \frac{k}{2^k}$ **б)** $\sum \frac{k+l}{2^k 3^l}$

1◇6. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве X такая, что для некоторой постоянной M при всех n выполняется $\{f_1+\cdots+f_n\} \leqslant M$, а $\{b_j\}$ — монотонно убывающая последовательность вещественных чисел, сходящаяся к нулю. Покажите, что ряд $\sum b_k f_k$ сходится (равномерно).

1◇7. Покажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{t\to 1-0}\sum a_n t^n = \sum a_n$.

1◇8. Найдите области сходимости рядов **а)** $\sum \frac{1}{1+x^n}$ **б)** $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

1◇9. Постройте примеры степенных рядов с областями сходимости: $\{0\}$, $(-R,R)$, $[-R,R)$, $[-R,R]$.

1◇10. Покажите, что для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

- $f(x) = O(x)$ при $x\to 0$.
- Для всякого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится абсолютно.
- Для всякого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится.