Теория меры

2⋄1. Докажите, что если S — полукольцо, то его минимальное кольцо $R(S)$ совпадает с совокупностью множеств вида $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

2⋄2. Докажите, что прямое произведение полуколец является полукольцом, а прямое произведение колец — не обязательно кольцо.

2⋄3. Покажите что если $A \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу, то $\mu(A) = \sup\limits_{\substack{K \subseteq A \\ K \text{ компактно}}} \mu(K)$.

2⋄4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ единичный квадрат, $S \subset P(X)$ полукольцо прямоугольников вида $T_{ab} = \{(u, v) \in X : a \leqslant u \leqslant b,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ с мерой $\mu(T_{ab}) = b - a$. Покажите, что множество $\widetilde{T} = \{0 \leqslant u \leqslant 1,\ v = 1/2\}$ неизмеримо.

2⋄5. Пусть μ мера на S. Покажите, что следующие условия эквивалентны, если S кольцо, и не обязательно эквивалентны, если S полукольцо.

а) σ-аддитивность: $\mu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

б) полунепрерывность сверху: если $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,
то $\mu(A) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

в) полунепрерывность снизу: если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,
то $\mu(A) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

2⋄6. Докажите что совокупность Q всех таких множеств $A \in P(X)$, что либо A, либо $X \setminus A$ не более чем счётно, является $\sigma-$алгеброй.

2⋄7. Докажите, что если $A \subset \mathbb{R}$ измеримое по Лебегу множество ненулевой меры, то $A - A \overset{\text{def}}{=} \{x - y | x, y \in A\}$ содержит некоторую окрестность нуля.

2⋄8. Докажите, что если на точках единичного отрезка ввести отношение эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$ и составить множество Q взяв по одному представителю из каждого класса эквивалентности, то Q будет неизмеримо по Лебегу.

2⋄9. Пусть на алгебре $R \subset P(X)$ задана $\sigma-$аддитивная конечная $(\mu(X) < \infty)$ мера. Зададим на $P(X)$ внутреннюю меру $\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A)$. Покажите что $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$ и что A измеримо $\Leftrightarrow \mu_*(A) = \mu^*(A)$.

2⋄10. Покажите что $A \sim B \Leftrightarrow \mu^*(A \bigtriangleup B) = 0$ задаёт на $P(X)$ отношение эквивалентности, что на множестве M классов эквивалентности $\rho(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \mu^*(A \bigtriangleup B)$ является метрикой и что пространство M полно относительно этой метрики.