Измеримые функции

4◇1. Определим на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x) = \max\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i$, где x_i — цифры десятичной записи числа $x = 0,x_1x_2x_3\cdots$. Докажите, что $f(x)$ измерима и почти всюду постоянна.

4◇2. Обозначим через $\chi_A(x)$ характеристическую функцию множества A, равную единице в точках $x \in A$ и нулю в остальных точках. Определим «треугольное представление» натуральных чисел как разложение $n = k(k-1)/2 + l$, где k — номер диагонали, а l — номер числа на диагонали в полубесконечной матрице:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \cdots \\ 3 & 5 & \cdots & \\ 6 & \cdots & & \end{pmatrix}$$

и зададим последовательность функций $f_n = \chi_{[\frac{l-1}{k},\frac{l}{k}]}$, где $n = k(k-1)/2 + l$.

Докажите, что $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, и при этом $\lim f_n$ не существует ни при каком x.

4◇3. Пусть $f(x)$ — измеримая по Лебегу функция на $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. Докажите, что на отрезке $[0,1]$

$$f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{\mu} f(x)$$

4◇4. Пусть f_n — последовательность измеримых функций. Покажите, что множество точек, для которых существует предел $\lim f_n(x)$, измеримо.

4◇5. Пусть f всюду дифференцируема на $[0,1]$. Покажите, что f' измерима.

4◇6. Для меры Лебега приведите пример непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ таких что $\mu(A) = \mu(B) = 0$, $\mu\big(f(A)\big) > 0$, а $f(B)$ неизмеримо.

4◇7. Докажите, что если функции f_i, g_i измеримы на пространстве X с мерой μ, то при $\mu(X) < \infty$ из $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $g_n \xrightarrow{\mu} g$ следует $f_ng_n \xrightarrow{\mu} fg$.

4◇8. Покажите, что при $\mu(X) = \infty$ утверждение предыдущей задачи неверно.

4◇9. Докажите, что всякая измеримая функция может быть представлена в виде равномерного предела простых (т.е. принимающих не более чем счётное число значений) измеримых функций.

4◇10. Докажите, что функция f измерима по Лебегу на $[0,1]$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция отличающаяся от $f(x)$ на множестве меры меньше ε.