Интеграл Лебега

5◇1. Докажите, что функции $f_n(x) = \frac{[nx]}{n}$ лежат в $S\big([0,1]\big)$ и образуют фундаментальную последовательность, не имеющую в предела в $S\big([0,1]\big)$. Найдите её предел в $L_1\big([0,1]\big)$.

5◇2. Пусть f — вещественнозначная монотонно возрастающая гладкая функция на отрезке $[0,1]$, а g — обратная к ней функция на отрезке $[f(0), f(1)]$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f(x)d\mu = \int\limits_{f(0)}^{f(1)} yg'(y)d\nu,$$

где μ и ν — меры Лебега на двух копиях пространства $\mathbb{R}$.

5◇3. Покажите, что интеграл Лебега от неотрицательной суммируемой функции f по отрезку $[0,1]$ совпадает с мерой Лебега множества

$$F = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

5◇4. Покажите, что неотрицательная измеримая функция f на множестве конечной меры X суммируема если и только если сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu\big(\{x \in X,\ f(x) \geqslant 2^k\}\big).$$

5◇5. Покажите, что неотрицательная измеримая функция f на множестве бесконечной меры X суммируема если и только если сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \mu\big(\{x \in X,\ f(x) > 2^{-k}\}\big)$$

▷ *Сходимость в пространстве $L_1(X,\mu)$ в топологии, заданной метрикой d_1, называется сходимостью в среднем.*

5◇6. Найдите пример последовательности $f_n \in L_1(X,\mu)$ сходящейся равномерно, но не сходящейся в среднем.

5◇7. Докажите, что при $\mu(X) < \infty$ из равномерной сходимости последовательности $f_n \in L_1(X,\mu)$ следует её сходимость в среднем.

5◇8. Докажите, что из сходимости в среднем следует сходимость по мере.

5◇9. Найдите пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке сходящейся к нулю в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

5◇10. Найдите пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке сходящейся к нулю поточечно, но не сходящейся в среднем.