

## Гармонические функции

- 6◇1.** Найдите все гармонические функции  $u(x, y)$  вида  $u = \varphi(x^2 + y^2)$ ,  $u = \varphi(x^2 - y^2)$ ,  $u = \varphi(\frac{y}{x})$ .
- 6◇2.** Найдите выражение для оператора Лапласа в полярных координатах.
- 6◇3.** При каких условиях на постоянную замену координат  $x = C\tilde{x}$  оператор Лапласа в новых координатах  $\tilde{x}$  будет иметь вид  $\Delta = \partial_{\tilde{x}_1}^2 + \dots + \partial_{\tilde{x}_n}^2$ ?
- 6◇4.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r = |x|$ ,  $u(x) = f(r)$ . Выразите  $\Delta u$  через  $f, f', f''$ .
- 6◇5.** Найдите радиальное решение уравнения Лапласа в  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
- 6◇6.** Докажите, что гармоническая на всём  $\mathbb{R}^n$  функция не может быть ограниченной.
- 6◇7.** Покажите, что если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — голоморфная в области  $D$  функция, то  $\operatorname{Re}f(z) = u(x, y)$  и  $\operatorname{Im}f(z) = v(x, y)$  — гармонические функции в  $D$ .
- 6◇8.** Всякую комплекснозначную функцию можно переписать в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = R(x, y)(\cos \varphi(x, y) + i \sin \varphi(x, y))$ . Пусть  $f(z)$  голоморфна на всей  $\mathbb{C}$ . Покажите, что  $R(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  — гармонические функции на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .
- 6◇9.** Покажите, что на плоскости угол, под которым из точки виден фиксированный отрезок есть гармоническая функция.
- 6◇10.** Покажите, что гармонические в шаре  $\{|x| < R \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  и совпадающие на его границе функции  $u_1, u_2$  совпадают и везде внутри шара.