

Гармонические функции

- 6◇1.** Найдите все гармонические функции $u(x, y)$ вида $u = \varphi(x^2 + y^2)$, $u = \varphi(x^2 - y^2)$, $u = \varphi(\frac{y}{x})$.
- 6◇2.** Найдите выражение для оператора Лапласа в полярных координатах.
- 6◇3.** При каких условиях на постоянную замену координат $x = C\tilde{x}$ оператор Лапласа в новых координатах \tilde{x} будет иметь вид $\Delta = \partial_{\tilde{x}_1}^2 + \dots + \partial_{\tilde{x}_n}^2$?
- 6◇4.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x|$, $u(x) = f(r)$. Выразите Δu через f, f', f'' .
- 6◇5.** Найдите радиальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- 6◇6.** Докажите, что гармоническая на всём \mathbb{R}^n функция не может быть ограниченной.
- 6◇7.** Покажите, что если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфная в области D функция, то $\operatorname{Re}f(z) = u(x, y)$ и $\operatorname{Im}f(z) = v(x, y)$ — гармонические функции в D .
- 6◇8.** Всякую комплекснозначную функцию можно переписать в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = R(x, y)(\cos \varphi(x, y) + i \sin \varphi(x, y))$. Пусть $f(z)$ голоморфна на всей \mathbb{C} . Покажите, что $R(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — гармонические функции на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- 6◇9.** Покажите, что на плоскости угол, под которым из точки виден фиксированный отрезок есть гармоническая функция.
- 6◇10.** Покажите, что гармонические в шаре $\{|x| < R \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ и совпадающие на его границе функции u_1, u_2 совпадают и везде внутри шара.