

Разбиения

Задача 2.1. Вычислите бесконечное произведение $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\dots$

Задача 2.2. а) Докажите алгебраически, что

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\dots}$$

б*) Докажите то же комбинаторно.

Задача 2.3. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа N на слагаемые, не превосходящие k ; выпишите формулу для производящей функции (по N) этих чисел.

Задача 2.4. а)
$$\prod_n \frac{1}{(1-q^n)} = \sum_r \frac{q^{r^2}}{[(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)]^2}$$

б)
$$\prod_n (1+q^n) = \sum_r \frac{q^{r(r+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$$

▷ Последние два тождества нашёл Эйлер. Намного сложнее доказать похожие на них *тождества Роджерса–Рамануджана* для $\sum \frac{q^{r^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$ и $\sum \frac{q^{r(r+1)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$.

Задача 2.5. Асимптотически а) $A\sqrt{n} < p(n)$; б*) $p(n) < B\sqrt{n}$.