Числа Бернулли и треугольник Эйлера

▷ Определение чисел Бернулли состоит в том, что $\sum B_m \frac{t^m}{m!} = \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \cdots$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Задача 5.1. а) Докажите, что $B_{2k+1} = 0$ при $k > 0$.
Выразите коэффициенты ряда б) $t \operatorname{ctg} t$; в) $\operatorname{tg} t$ через числа Бернулли.

Задача 5.2. а) Пусть T_n — такая последовательность многочленов, что $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = T_n(\operatorname{tg} x)$. Тогда $\sum T_n(z) \frac{t^n}{n!} = \frac{\sin t + z \cos t}{\cos t - z \sin t}$.
б*) Найдите комбинаторную интерпретацию коэффициентов многочленов T_n.

Задача 5.3. $(-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{2n} B_{2n}$ — целое неотрицательное число.

Задача 5.4. *Треугольник Эйлера* состоит из целых чисел E_n^k, задаваемых рекуррентой $E_n^k = E_n^{k-1} + E_{n-1}^{n-k}$ и начальным условем $E_0^0 = 1$ ($E_n^k = 0$ при $k > n$, $k < 0$).
а) $E_n := E_n^n$ есть количество таких перестановок, что $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots \lesseqgtr \sigma(n)$. (Ясно, что $E_n = \sum_k E_{n-1}^{k-1}$. Подумайте, какой характеристике перестановки соответствует k.)
б) Докажите комбинаторно, что $\sum\limits_i (-1)^i \binom{2l+1}{2i} E_{2l+1-2i} = (-1)^l$.
(Рассмотрите перестановки, т. ч. $\sigma(1) < \ldots < \sigma(2i)$ и $\sigma(2i+1) < \sigma(2i+2) > \ldots > \sigma(2l+1)$.)
в) Найдите экспоненциальную производящую функцию чисел E_{2l+1}.
г*) То же для чисел E_{2l}.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 & & \\
 & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & \\
0 & & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16
\end{array}
$$