

## Непересекающиеся пути и определители

**Задача 7.1.** Чему равен определитель матрицы  $h \times h$  а)  $a_{ij} = C_{i+j-1}$ ; б)  $a_{ij} = C_{i+j}$ ; в\*)  $a_{ij} = C_{n+i+j-2}$  (где  $C_n$  —  $n$ -е число Каталана)?

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ C_{n+2} & C_{n+3} & \dots & C_{n+h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h} & C_{n+h+1} & \dots & C_{n+2h-1} \end{pmatrix}$$

**Задача 7.2.** Придумайте определитель из биномиальных коэффициентов, вычисляющий количество диаграмм Юнга внутри данной.

**Задача 7.3.** Будем называть *треугольником Гельфанда–Цетлина* треугольную таблицу из целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего, но (строго) меньше правого верхнего соседа.

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & \dots & l_{n-1} & l_n \\ & l_{12} & l_{23} & \dots & l_{n-1n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & l_{1n-1} & l_{2n} \\ & & & & l_{1n} \end{matrix}$$

а) Сведите задачу о нахождении количества треугольников Гельфанда–Цетлина с *данной первой строкой* к вычислению некоторого определителя.

б) Докажите, что их количество равно  $\prod_{i>j} \frac{l_i - l_j}{i - j}$ . Если понимаете связь с формулой Вейля для размерности неприводимого представления  $gl_n$  — порауйтесь.

**Задача 7.4.** Постройте биекцию между треугольниками Гельфанда–Цетлина (с подходящей первой строкой) и диаграммами Юнга, помещающимися внутри коробки  $a \times b \times c$ .

